



ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) විභාගය - 2014

10 - සංයුක්ත ගණිතය I

ලකුණු දීමේ පටිපාටිය

www.alevelapi.com

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) විභාගය - 2014

10 - සංයුක්ත ගණිතය

ලකුණු බෙදී යාම

I කොටස

I පත්‍රය :

$$A \text{ කොටස} : 10 \times 25 = 250$$

$$B \text{ කොටස} : 05 \times 150 = 750$$

$$\text{එකතුව} = 1000 / 10$$

$$I \text{ පත්‍රය} - \text{අවසාන ලකුණු} = 100$$

1. ගණිත අනුභූත මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^n r(3r-1) = n^2(n+1)$ බව සාධනය කරන්න.

$n=1$ විට, ව. පැ. = $\sum_{r=1}^1 r(3r-1) = 2$ හා

ද. පැ. = $1^2(1+1) = 2$.

එනමින් $n=1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. (5)

ඔනෑම $k \in \mathbb{Z}^+$ ගෙන, $n=k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එනම් $\sum_{r=1}^k r(3r-1) = k^2(k+1)$ වේ. (5)

දැන්, $\sum_{r=1}^{k+1} r(3r-1) = \sum_{r=1}^k r(3r-1) + (k+1)[3(k+1)-1]$

(5)
 $= k^2(k+1) + (k+1)(3k+2)$ (අනුභූතය කල්පිතයෙන්)
 $= (k+1)[k^2 + 3k + 2]$
 $= (k+1)^2(k+2) \leftarrow$ (5)
 $= (k+1)^2[(k+1)+1]$

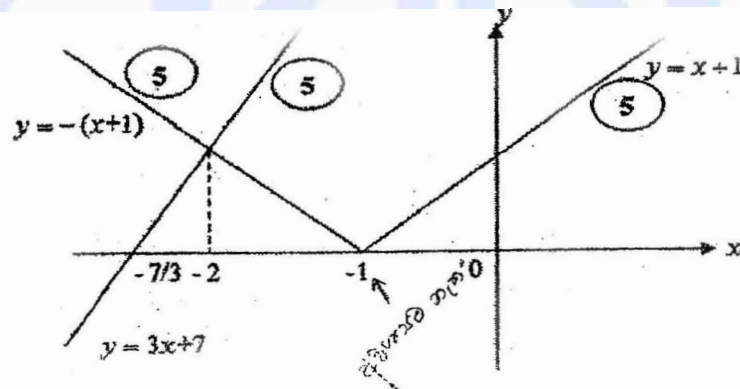
එනමින් $n=k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ නම්, $n=k+1$ සඳහාද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.
 එබැවින් ගණිත අනුභූත මූල ධර්ම මගින් ප්‍රතිඵලය සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහාම සත්‍ය වේ.

ආකාරයෙන් (5)

25

2. ප්‍රස්ථාරික ක්‍රමයක් භාවිතයෙන් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $|x+1| > 3x+7$ අසමානතාව සඳරාලන x හි සියලු තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.

(I ක්‍රමය)



පේදන ලක්ෂ්‍යයේදී, $-x-1=3x+7$ විය යුතු බැවින් එහිදී $x=-2$ විය යුතුය. (5)

එබැවින් වියදුම් කුලකය = $\{x \in \mathbb{R} : x < -2\}$ (5)

25

වෙනත් ක්‍රමයක්

(i) අවස්ථාව

$$x \leq -1$$

මෙම අවස්ථාවේදී $|x+1| > 3x+7$

$$\Leftrightarrow -(x+1) > 3x+7 \quad (5) \Leftrightarrow x < -2. \quad (5)$$

එබැවින් මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම් $x < -2$ තෘප්ත කරන x අගයන් වේ.

(ii) අවස්ථාව

$$x > -1$$

මෙම අවස්ථාවේදී $|x+1| > 3x+7$

$$\Leftrightarrow x+1 > 3x+7 \quad (5) \\ \Leftrightarrow x < -3 \quad (5)$$

මෙම විසංවාදයෙන්, මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම් නොමැති බව ගම්‍ය වේ.

එබැවින් විසඳුම් කුලකය $= \{x \in \mathbb{R} : x < -2\}.$ (5)

25

වෙනත් ක්‍රමයක්

(i) අවස්ථාව

$$x \leq -\frac{7}{3}$$

මෙම අවස්ථාවේදී $3x+7 \leq 0$ බැවින් $|x+1| > 3x+7$ යන්න $x \leq -\frac{7}{3}$ තෘප්ත කරන

සියලු x අගයන් ගෙන් තෘප්ත වේ. (5)

(ii) අවස්ථාව

$$x > -\frac{7}{3}$$

මෙම අවස්ථාවේදී $|x+1| > 3x+7$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 > (3x+7)^2 \quad (5) \\ \Leftrightarrow 8x^2 + 40x + 48 < 0 \Leftrightarrow (x+2)(x+3) < 0 \Leftrightarrow -3 < x < -2 \quad (5)$$

මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම් $-\frac{7}{3} < x < -2$ තෘප්ත කරන x අගයන් වේ. (5)

අගයන් දෙකම සැලකීමෙන්, විසඳුම් කුලකය $= \{x \in \mathbb{R} : x < -2\}.$ (5)

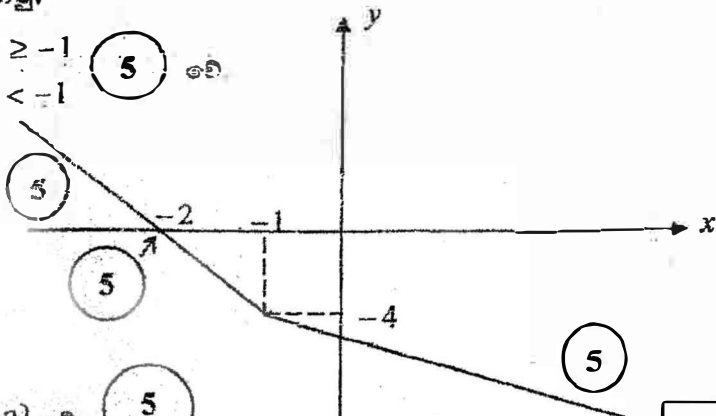
25

වෙනත් ක්‍රමයක්

$|x+1| > 3x+7$ අසමානතාව $|x+1| - (3x+7) > 0$ යන්නට කුලය වේ.

$y = |x+1| - (3x+7)$ යැයි ගනිමු.

$$\text{එනිසා } y = \begin{cases} -2x-6, & x \geq -1 \\ -4x-8, & x < -1 \end{cases} \quad (5) \text{ වේ.}$$



විසඳුම් කුලකය $= \{x \in \mathbb{R} : x < -2\}$ වේ. (5)

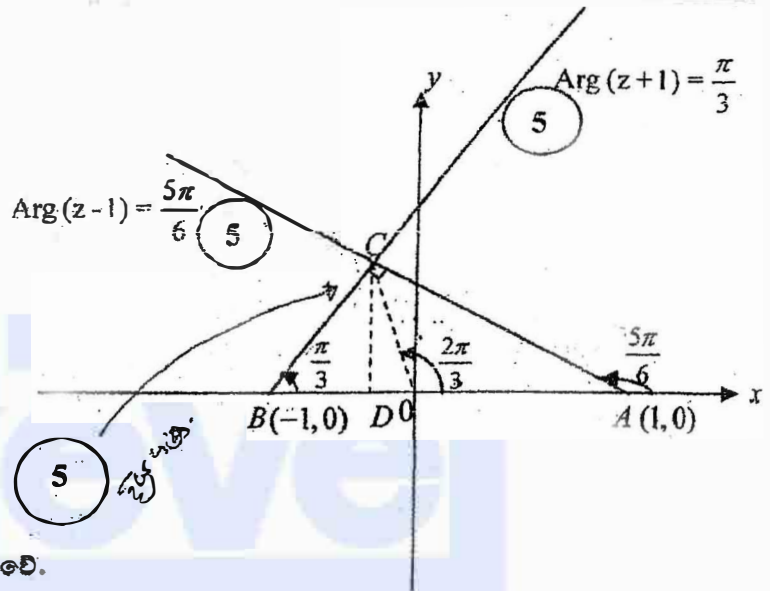
25

3. එක ම ආගන්ති සටහනක

(i) $\text{Arg}(z+1) = \frac{\pi}{3}$,

(ii) $\text{Arg}(z-1) = \frac{5\pi}{6}$

සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා මගින් තීරුපණය කරනු ලබන ලක්ෂ්‍යයන්හි පරාවල දළ සටහන් ඇඳ, ඒවායේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යය මගින් තීරුපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.



අවශ්‍ය සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව z_c යයි ගනිමු.

$$\angle ACB = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \text{ වේ.}$$

$AB = 2$ බැවින්, එවිට $BC = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 1$ වේ.

ඇත් $CD = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ හා $BD = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ වේ. හෝ $\left[z+1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right]$

$\therefore z_c = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

25

වෙනත් ක්‍රමයක්

$\angle ACB = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ වේ. එබැවින්, කේන්ද්‍රය O ද අරය 1 ක්ද වූ වෘත්තය මත C පිහිටයි.

$\therefore \angle AOC = \frac{2\pi}{3}$ හා එනමින් $z_c = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ වේ.

වෙනත් ක්‍රමයක්

AC හා BC හි සමීකරණ පිළිවෙලින් $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$ හා $y = \sqrt{3}(x+1)$ වේ.

ඒවා විසඳීමෙන්, $x = -\frac{1}{2}$ හා $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ලැබේ.

$$\therefore z_c = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i. \quad (5)$$

15

4. $n \in \mathbb{Z}^+$ යැයි ගනිමු. $\left(2 + \frac{3}{x}\right)(1+x)^n$ හි ප්‍රසාරණයේ x^{n-2} හි සංගුණකය 120 වේ. n හි අගය සොයන්න.

සුප්‍රසාරණ අංකනයෙන් $\left(2 + \frac{3}{x}\right)(1+x)^n = \left(2 + \frac{3}{x}\right) \sum_{r=0}^n {}^nC_r x^r \quad (5)$ ට $\frac{3}{x}$ වලින් ගුණනය කරමු.

x^{n-2} හි සංගුණකය 120 බව දී ඇති බැවින්,

$$(5) \quad 2 {}^nC_{n-2} + 3 {}^nC_{n-1} = 120 \text{ විය යුතුය.}$$

$$(5) \quad \text{එනම් } 2 \frac{n!}{(n-2)! 2!} + 3 \frac{n!}{(n-1)! 1!} = 120.$$

$$\Leftrightarrow n(n-1) + 3n = 120 \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 2n - 120 = 0 \Leftrightarrow (n+12)(n-10) = 0 \Leftrightarrow n = 10 \quad (\because n \in \mathbb{Z}^+) \quad (5)$$

25

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 2x}{x(1-\sqrt{1+x})} = -8$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 2x}{x(1-\sqrt{1+x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 2x}{x(1-\sqrt{1+x})} \times \frac{(1+\sqrt{1+x})}{(1+\sqrt{1+x})} \quad (5)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x (1+\sqrt{1+x})}{\cos^2 2x (-x^2)} \quad (5)$$

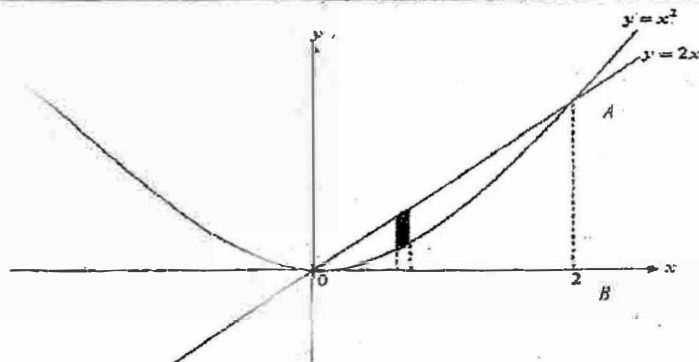
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 \left(\frac{-4}{\cos^2 2x} \right) (1+\sqrt{1+x}) \quad (5)$$

$$= 1^2 \times \left(\frac{-4}{1} \right) \times 2 = -8$$

ආරම්භක ආකාරයෙන් $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \theta}{\theta} \rightarrow 1$ යන නියමය භාවිත කරමින් පෙන්වන්න.

25

6. $y = 2x$ සරල රේඛාවෙන් හා $y = x^2$ වක්‍රයෙන් ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න.



පේදන ලක්ෂ්‍යයන් නිදී $x^2 = 2x$ විය යුතු බැවින් එම ලක්ෂ්‍යයන් නිදී $x=0$ හෝ $x=2$ වේ.

අවශ්‍ය වර්ගඵලය $= \int_0^2 (2x - x^2) dx$ (10)

$= \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2$ (5)

$= 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$ වර්ග ඒකක. (5)

25

වෙනත් ක්‍රමයක් පේදන ලක්ෂ්‍යයන් නිදී $x^2 = 2x$ විය යුතු බැවින් එම ලක්ෂ්‍යයන් නිදී $x=0$ හෝ $x=2$ වේ. (5)

අවශ්‍ය වර්ගඵලය $= \Delta OAB$ වර්ගඵලය $- \int_0^2 x^2 dx$ (10)

$= \frac{1}{2} \times 2 \times 4 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^2$ (5)

$= 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$ වර්ග ඒකක. (5)

25

7. $x = e^t + e^{-t}$, $y = e^t - e^{-t}$ මගින් දෙන ලක්ෂ්‍ය පක්ෂය C ගැසි ගනිමු; මෙහි t යනු කාලයක් ලෙස ගනිමු. t ඇසුරෙන් $\frac{dy}{dx}$ සොයා, $t = \ln 2$ ට අනුරූප ව C මත පූ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී ස්පර්ශ රේඛාවේ සමීකරණය $5x - 3y - 8 = 0$ බව පෙන්වන්න.

$x = e^t + e^{-t} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = e^t - e^{-t}$

$y = e^t - e^{-t} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = e^t + e^{-t}$

5

5

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} \quad (5)$$

(5)

C යනු $t = \ln 2$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. එවිට $C \equiv \left(2 + \frac{1}{2}, 2 - \frac{1}{2}\right)$ වේ.

එනම් $C \equiv \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ වේ. $\frac{dy}{dx} \bigg|_{\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)} = \frac{5/2}{3/2} = \frac{5}{3} \quad (5)$

අවසාන සමීකරණය $y - \frac{3}{2} = \frac{5}{3} \left(x - \frac{5}{2}\right)$ වේ. (5) එනම් $5x - 3y - 8 = 0$ වේ.

25

8. $\lambda \in \mathbb{R}$ හා $\lambda \neq \pm 1$ යැයි ගනිමු. ඛණ්ඩාංක අක්ෂ හා $(1+\lambda)x - 2(1-\lambda)y - 2(1-\lambda) = 0$ සරල රේඛාව මගින් ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය වර්ග ඒකක 4 ක් වේ. λ හි අගයන් සොයන්න.

AB රේඛාවේ සමීකරණය $(1+\lambda)x - 2(1-\lambda)y - 2(1-\lambda) = 0$ වේ.

එයින් $y = 0$ විට $x = \frac{2(1-\lambda)}{(1+\lambda)}$ හා $x = 0$ විට $y = -1$ වේ.

$\therefore \Delta OAB$ හි වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \times 1 \times \left| \frac{2(1-\lambda)}{1+\lambda} \right| = 4 \quad (5)$

$\Leftrightarrow \left| \frac{(1-\lambda)}{1+\lambda} \right| = 4$

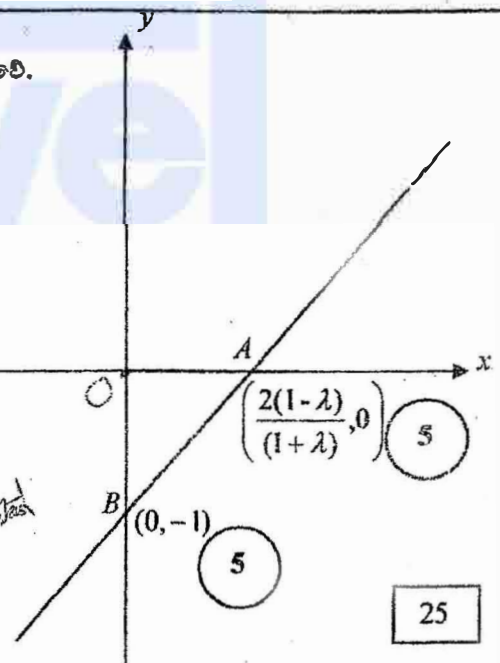
$\Leftrightarrow \frac{(1-\lambda)}{(1+\lambda)} = \pm 4 \Leftrightarrow 1-\lambda = 4(1+\lambda) \text{ හෝ } 1-\lambda = -4(1+\lambda)$

$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{3}{5} \text{ හෝ } \lambda = -\frac{5}{3}.$

(5)

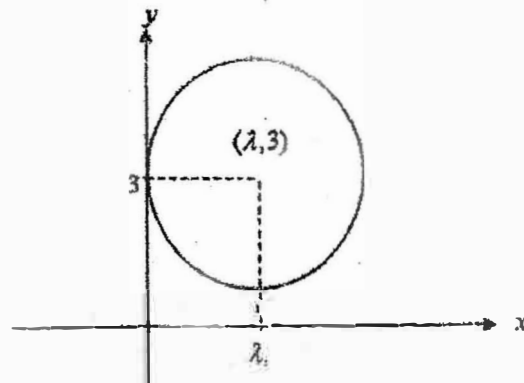
(5)

මාත්‍රය තීරණය කළේය.
 ලකුණු 5 ක් ලබා ගත්තේය.



25

9. $(0, 3)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී y -අක්ෂය ස්පර්ශ කරන්නා වූ ද $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$ වෘත්තය ප්‍රලම්භ ලෙස ඡේදනය කරන්නා වූ ද වෘත්තයෙහි සමීකරණය සොයන්න.



6

අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය $(x-\lambda)^2 + (y-3)^2 = \lambda^2$ ලෙස ලිවිය හැකිය.

එනම් $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 6y + 9 = 0$.

මෙය $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$ වෘත්තයට ප්‍රලම්බ බැවින්,

$2(-4)(-\lambda) + 2(2)(-3) = -5 + 9$ වේ. (5)

$\Leftrightarrow 8\lambda - 12 = 4 \Leftrightarrow \lambda = 2$ (5)

එනමින් අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ වේ.

(5)

කේන්ද්‍රය (5)

සමීකරණය (5)

25

10. $\tan \alpha = -1$ හා $\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ හා $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ වේ. $\cos(\alpha + \beta)$ හි අගය සොයන්න.

(5)

$\tan \alpha = -1$ හා $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \alpha = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ හා $\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ හා $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi \Rightarrow \cos \beta = -\sqrt{1 - \sin^2 \beta} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$. (10)

දැන්, $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ (5)

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$= -\frac{2}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$. (5)

25

www.alevelapi.com

11. (a) $a \in \mathbb{R}$ යැයි ද $f(x) = 3x^3 + 5x^2 + ax - 1$ යැයි ද ගනිමු. $(3x-1)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් බව දී ඇත. a හි අගය සොයන්න.

$f(x)$ යන්න $(3x-1)(x+k)^2$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි k යනු නියතයකි.

ඉහත ප්‍රකාශනයෙහි $3x-1$ යන්න b හා c නියත වන $b(x+1)+c$ ආකාරයට ලිවීමෙන්, $f(x)$ යන්න $(x+1)^3$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

(b) $a, b, c \in \mathbb{R}$ හා $ac \neq 0$ යැයි ගනිමු. ශුන්‍යය, $ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයෙහි මූලයක් නොවන බව පෙන්වන්න. මෙම සමීකරණයේ මූල α හා β යැයි ද $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$ යැයි ද ගනිමු. $ac(\lambda+1)^2 = b^2\lambda$ බව පෙන්වන්න.

$p, q, r \in \mathbb{R}$ හා $pr \neq 0$ යැයි ගනිමු. තව ද $px^2 + qx + r = 0$ සමීකරණයේ මූල γ හා δ යැයි ද $\mu = \frac{\gamma}{\delta}$ යැයි ද ගනිමු. $\lambda = \mu$ හෝ $\lambda = \frac{1}{\mu}$ වන්නේ $acq^2 = prb^2$ ම නම් පමණක් බව පෙන්වන්න.

$kx^2 - 3x + 2 = 0$ හා $8x^2 + 6bx + 1 = 0$ සමීකරණවල මූල එක ම අනුපාතයට වන බව දී ඇත; මෙහි $k \in \mathbb{R}$ වේ. k හි අගය සොයන්න.

(a) $f(x) = 3x^3 + 5x^2 + ax - 1$

$(3x-1)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් බැවින්, සාධක ප්‍රමේයයෙන්, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$. (10)

එනම්, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \times \frac{1}{27} + 5 \times \frac{1}{9} + a \times \frac{1}{3} - 1$ බැවින් (10)

$1 + 5 + 3a - 9 = 0$

$\therefore a = 1$. (5)

25

$f(x) = 3x^3 + 5x^2 + x - 1 = (3x-1)(x^2 + 2x + 1)$ (10)

$= (3x-1)(x+1)^2$ (5)

මෙය $k = 1$ සහිතව අවශ්‍ය ආකාරයෙන් වේ. (5)

20

$3x-1 = 3(x+1) - 4$ (5)

මෙය, $b = 3$ හා $c = -4$ සහිතව අවශ්‍ය ආකාරයෙන් වේ.

$f(x) = [3(x+1) - 4](x+1)^2 = 3(x+1)^3 - 4(x+1)^2$ (5)

$\therefore$ අවශ්‍ය ශේෂය $= -4(x+1)^2$ (5)

15

(b) ශුන්‍යය $ax^2 + bx + c = 0$ හි සාධකයක් ලෙස ගනිමු.

එවිට, $x = 0$ ආදේශයෙන්, $c = 0$ ලැබේ. (5)

$ac \neq 0$ බැවින්, මෙය විෂංවාදයකි.

$\therefore$ ශුන්‍යය $ax^2 + bx + c = 0$ හි මූලයක් නොවේ. (5)

10

එබැවින්, $\alpha \neq 0$ හා $\beta \neq 0$.

$$\text{තවද, } \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \text{ හා } \alpha\beta = \frac{c}{a} \quad (10)$$

$$\text{දැන්, } \lambda = \frac{\alpha}{\beta},$$

$$ac(\lambda+1)^2 = ac\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)^2 = \frac{ac}{\beta^2}(\alpha+\beta)^2 = \frac{ac}{\beta^2} \cdot \frac{b^2}{a^2} = b^2 \frac{c}{a\beta^2} = b^2 \frac{\alpha\beta}{\beta^2} = b^2 \frac{\alpha}{\beta} = b^2 \lambda$$

නැත්නම්,

$$\left[\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda} = \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)^2}{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta} = \frac{\frac{b^2}{a^2}}{\frac{c}{a}} = \frac{b^2}{ac} \therefore ac(\lambda+1)^2 = b^2 \lambda \right]$$

45

ඉහත පරිදිම, $\gamma \neq 0$ හා $\delta \neq 0$, ද $pr(\mu+1)^2 = \mu q^2$ වේ. (5)

$$\therefore \frac{ac(\lambda+1)^2}{pr(\mu+1)^2} = \frac{b^2 \lambda}{q^2 \mu} \quad \text{බැවින්, } acq^2 \mu (\lambda+1)^2 = prb^2 \lambda (\mu+1)$$

$$\therefore acq^2 = prb^2 \Leftrightarrow \mu(\lambda+1)^2 = \lambda(\mu+1)^2 \quad (10)$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 \mu + 2\lambda \mu + \mu = \lambda \mu^2 + 2\lambda \mu + \lambda$$

$$\Leftrightarrow \lambda \mu (\lambda - \mu) - (\lambda - \mu) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - \mu)(\lambda \mu - 1) = 0 \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \mu \text{ හෝ } \lambda = \frac{1}{\mu} \quad (5)$$

25

මුල එකම අනුපාතයට වන්නේ, $\Leftrightarrow \lambda = \mu$ හෝ $\lambda = \frac{1}{\mu}$.

$$\therefore acq^2 = prb^2 \text{ විය යුතුය.}$$

$$\therefore acq^2 = prb^2$$

(5)

$$\text{එනම් } 2k(6k)^2 = 8 \times 9 \quad \text{බැවින් } k^3 = 1 \text{ විය යුතුය.}$$

$$\therefore k = 1$$

(5)

10

12. (a) පාසල් හයක් තරුණ ක්‍රීඩා සමුළුවකට සහභාගි වන අතර, ක්‍රිකට් ක්‍රීඩකයකුගෙන්, පාපන්දු ක්‍රීඩකයකුගෙන් හා හොකි ක්‍රීඩකයකුගෙන් සමන්විත ක්‍රීඩකයින් තුන්දෙනෙකුගෙන් එක් එක් පාසල නියෝජනය කළ හැකි ලබයි. මෙම ක්‍රීඩකයින් අතුරෙන් සාමාජිකයින් හයදෙනෙකුගෙන් යුත් කමිටුවක් තෝරා ගැනීමට අවශ්‍ය ව ඇත.

- එක් එක් ක්‍රීඩාවෙන් ක්‍රීඩකයින් දෙදෙනෙකු බැගින් ඇතුළත් කළ යුතු නම්,
 - පාසල් හය ම නියෝජනය වන පරිදි, එක් එක් ක්‍රීඩාවෙන් ක්‍රීඩකයින් දෙදෙනෙකු බැගින් ඇතුළත් කළ යුතු නම්,
 - පාසල් දෙකකින් එක් එක් පාසලෙන් ක්‍රීඩකයින් දෙදෙනෙකු බැගින් ද ඉතිරි පාසල් දෙකකින් එක් එක් පාසලෙන් එක ක්‍රීඩකයකු බැගින් ද ඇතුළත් කළ යුතු නම්.
- මෙම කමිටුව සෑදිය හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \frac{r^2 - r - 5}{r(r+1)(r+4)(r+5)}$ සෑදී ගනිමු.

$n = 0, 1, 2, 3$ සඳහා r^n හි පංශුණක සෑදීමෙන්, $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $r^2 - r - 5 = A(r^2 - 1)(r+5) - Br^2(r+4)$ වන පරිදි A හා B නියත සවිස්ත බව පෙන්වන්න.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = f(r) - f(r+1)$ වන පරිදි $f(r)$ සොයන්න.

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^n U_r = -\frac{n}{(n+1)(n+5)}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අනන්ත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වන බව තවදුරටත් පෙන්වා, එහි ඵලභාය සොයන්න.

ජ ගමන්, $\sum_{r=3}^{\infty} 3U_r$ සොයන්න.

(a) (i) අවශ්‍ය ක්‍රම ගණන $= {}^6C_2 \times {}^6C_2 \times {}^6C_2 = (15)^3 = 3375$ 20

(ii) අවශ්‍ය ක්‍රම ගණන $= {}^6C_2 \times {}^4C_2 \times {}^2C_2 = 90$ 15

(iii) පාසල් දෙකකින් එක් එක් පාසලෙන් ක්‍රීඩකයන් දෙදෙනෙකු බැගින් තේරිය හැකි

වෙනස් ක්‍රම ගණන $= {}^6C_2 \times {}^3C_2 \times {}^3C_2$ 10

ඉතිරි පාසල් දෙකකින් එක් එක් පාසලෙන් එක් ක්‍රීඩකයෙකු බැගින් තේරිය හැකි වෙනස් ක්‍රම ගණන

$= {}^4C_2 \times {}^3C_1 \times {}^3C_1$ 10

අවශ්‍ය ක්‍රම ගණන $= {}^6C_2 \times {}^3C_2 \times {}^3C_2 \times {}^4C_2 \times {}^3C_1 \times {}^3C_1 = 7290$ 5

5

30

(b) $U_r = \frac{r^2 - r - 5}{r(r+1)(r+4)(r+5)}$

$r^2 - r - 5 = A(r^2 - 1)(r+5) - Br^2(r+4)$

$= (A-B)r^3 + (5A-4B)r^2 - Ar - 5A$ 5

දෙපැත්තේ සංගුණක සංසන්දනය කරමු.

$$r^3: 0 = A - B \dots\dots\dots(i)$$

$$r^2: 1 = 5A - 4B \dots\dots\dots(ii)$$

$$r^1: -1 = -A \dots\dots\dots(iii)$$

$$r^0: -5 = -5A \dots\dots\dots(iv)$$

10 - 40 / 20 වී
සිතුව එවැනි 2 හා
5 ගැන

ඇත් (i) හා (iii) $\Rightarrow A=1$ හා $B=1$.

මෙම අගයන්ගෙන් (ii) හා (iv) ද තෘප්ත වේ.

එමනිසා දී ඇති අවශ්‍යතාව තෘප්ත කරන පරිදි A හා B නියත පවතී. ඒවායේ අගයන් $A=1$ හා $B=1$. (5)

25

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා

$$U_r = \frac{r^2 - r - 5}{r(r+1)(r+4)(r+5)} = \frac{(r^2 - 1)(r+5) - r^2(r+4)}{r(r+1)(r+4)(r+5)} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{ඇත්, } U_r &= \frac{r-1}{r(r+4)} \cdot \frac{r}{(r+1)(r+5)} \quad (5) \\ &= f(r) - f(r+1), \quad (5) \end{aligned}$$

$$\text{මෙහි } f(r) = \frac{r-1}{r(r+4)} \quad (5)$$

20

එවිට,

$$r=1: U_1 = f(1) - f(2) \quad (5)$$

$$r=2: U_2 = f(2) - f(3)$$

$\vdots$

$$r=n-1: U_{n-1} = f(n-1) - f(n) \quad (5)$$

$$r=n: U_n = f(n) - f(n+1) \quad (5)$$

$$\therefore \sum_{r=1}^n U_r = f(1) - f(n+1) = -\frac{n}{(n+1)(n+5)} \quad (5)$$

20

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n U_r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{(n+1)(n+5)} = 0 \text{ බැවින් } \sum_{r=1}^{\infty} U_r \text{ අභිසාරී වේ.} \quad (5)$$

එහි එකතුව 0 වේ. (5)

10

$$\sum_{r=3}^{\infty} 3U_r = 3 \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} U_r - U_1 - U_2 \right\} \quad (5)$$

$$= 3 \{ 0 - f(1) + f(3) \} = 3 \times \frac{2}{3 \times 7} = \frac{2}{7} \quad (5)$$

10

20

13. (a) $a, b \in \mathbb{R}$ යැයි ද $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ හා $B = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ යැයි ද ගනිමු. $A^T A = B$ වන පරිදි a හා b හි අගයන් සොයන්න; මෙහි A^T මගින් A න්‍යාසයෙහි පෙරළම දැක්වේ.

$C = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ හා $X = \begin{pmatrix} u \\ u+1 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $u \in \mathbb{R}$ වේ. $CX = \lambda BX$ යැයි ද ගනිමු; මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$ වේ. λ හි අගය හා u හි අගය සොයන්න.

λ හි මෙම අගය සඳහා $C - \lambda B$ න්‍යාසය සොයා, එහි ප්‍රතිලෝමය නොපවතියි බව පෙන්වන්න.

(b) $z \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු.

(i) $|1-z|^2 = 1 - 2\operatorname{Re}z + |z|^2$ බව හා

(ii) $z \neq 1$ සඳහා $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1 - \operatorname{Re}z}{|z|^2}$ බව පෙන්වන්න.

$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{2}$ වන්නේ $|z|=1$ හා $z \neq 1$ ම නම් සමාන බව අගයනය කරන්න.

S යනු, $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{2}$ හා $-\frac{\pi}{3} < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{3}$ යන අවශ්‍යතා දෙක ම සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවලින් සමන්විත කුලකය යැයි ගනිමු. S හි සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය ආගන්ති සටහනක අඳින්න.

z ජනන S තුළ වේ නම් හා $\operatorname{Re}z + \operatorname{Im}z = \frac{1}{\sqrt{2}}$ නම්, $z = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ බැවින් $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ (5) වන අතර එනමින්, $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & a^2 + 1 \end{pmatrix}$ (10)

දැන්, $A^T A - B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & a^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow 2 = b$ හා $a^2 + 1 = 1$ (10)

$\Leftrightarrow 2 = b$ හා $a = 0$ (5)

30

$C = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ හා $X = \begin{pmatrix} u \\ u+1 \end{pmatrix}$ බැවින්

$CX = \begin{pmatrix} 12u+5 \\ 8u+3 \end{pmatrix}$ (55) හා $BX = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u+1 \\ 2u+1 \end{pmatrix}$ (5)

එනමින්, $CX = \lambda BX \Leftrightarrow 12u+5 = \lambda(3u+1)$ හා $8u+3 = \lambda(2u+1)$

$\therefore \frac{12u+5}{8u+3} = \frac{\lambda(3u+1)}{\lambda(2u+1)}$ (5) (5)

එම නිසා $24u^2 + 22u + 5 = 24u^2 + 17u + 3 \Rightarrow 5u = -2$

$u = -\frac{2}{5}$ (5)

එවිට, $-\frac{16}{5} + 3 = \lambda\left(-\frac{4}{5} + 1\right) \therefore \lambda = -1$ (5)

30

දැන්, $C - \lambda B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ (5)

(5) $\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 0$ බැවින් $C - \lambda B$ හි ප්‍රතිලෝමය නොපවතී. (5)

15

වෙනත් ක්‍රමයක් දැන්, $C - \lambda B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ (5)

$\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ලෙස ගනිමු. (5)

$\Leftrightarrow 9p + 6r = 1 \dots\dots\dots (i)$

$9q + 6s = 0 \dots\dots\dots (ii)$

$6p + 4r = 0 \dots\dots\dots (iii)$

$6q + 4s = 1 \dots\dots\dots (iv)$

$\left. \begin{array}{l} (i) \times \frac{2}{3} \Rightarrow 6p + 4r = \frac{2}{3} \\ (iii) \Rightarrow 6p + 4r = 0 \end{array} \right\}$ මෙය විෂ-වාදයකි. (5)

එමනිසා $C - \lambda B$ හි ප්‍රතිලෝමය නොපවතී.

15

(b) (i) $|1 - z|^2 = (1 - z)(1 - \bar{z})$ (5)

$= (1 - z)(1 - \bar{z})$ (5)

$= 1 - (z + \bar{z}) + z\bar{z} = 1 - 2\operatorname{Re} z + |z|^2$ (5)

15

(ii) $|z| \neq 1$, සඳහා $\frac{1}{1 - z} = \frac{1}{(1 - z)} \times \frac{(1 - \bar{z})}{(1 - \bar{z})} = \frac{1 - \bar{z}}{|1 - z|^2}$ (5)

$\therefore \operatorname{Re} \frac{1}{1 - z} = \frac{1 - \operatorname{Re} \bar{z}}{|1 - z|^2} = \frac{1 - \operatorname{Re} z}{|1 - z|^2}$ (5)

20

වෙනත් ක්‍රමයක්

$z = x + iy$ ලෙස ගනිමු. මෙහි $x, y \in \mathbb{R}$ වේ.

(i) එවිට $1 - z = 1 - x - iy$ (5)

$\therefore |1 - z|^2 = (1 - x)^2 + y^2 = 1 - 2x + x^2 + y^2 = 1 - 2\operatorname{Re} z + |z|^2$ (5)

15

(ii) $z \neq 1$, සඳහා $\frac{1}{1 - z} = \frac{1}{1 - x - iy} \times \frac{(1 - x) + iy}{(1 - x) + iy} = \frac{(1 - x) + iy}{(1 - x)^2 + y^2}$ (5)

$\therefore \operatorname{Re} \frac{1}{1 - z} = \frac{1 - x}{(1 - x)^2 + y^2} = \frac{1 - \operatorname{Re} z}{|1 - z|^2}$ (5)

20

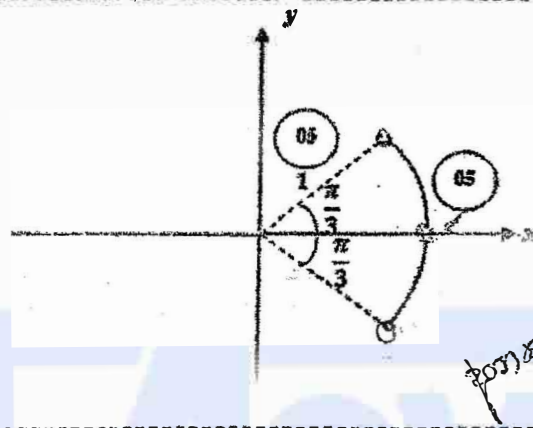
$$z \neq 1 \text{ සඳහා, } \operatorname{Re} \frac{1}{1-z} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1 - \operatorname{Re} z}{|1-z|^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - \operatorname{Re} z) = 1 - 2\operatorname{Re} z + |z|^2 \quad (5)$$

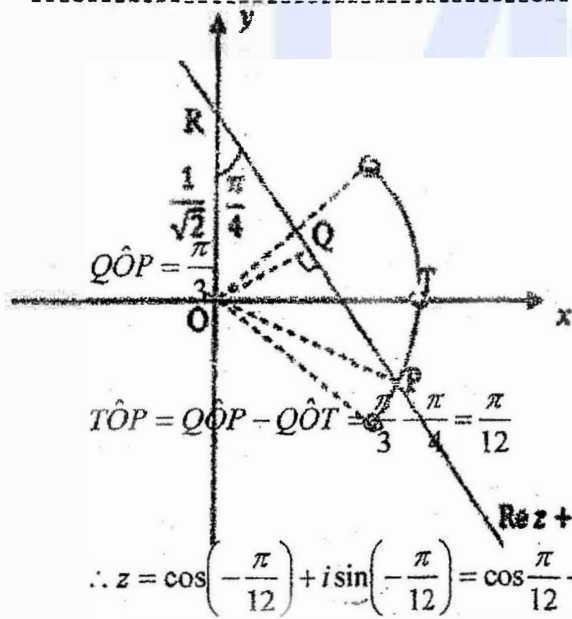
$$\Leftrightarrow |z|^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow |z| = 1 \quad (5)$$

10



10



$$OP = 1 \text{ හා } OQ = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}, \text{ නිසා}$$

5

$$\angle QOP = \frac{\pi}{3}$$

$$\angle TOP = \angle QOP - \angle QOT = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

5

5

20

වෙනත් ක්‍රමයක්

$$z \in S \Rightarrow z = \cos \theta + i \sin \theta; -\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{3} \quad (5)$$

$$\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos \theta + \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin 2\theta = -\frac{1}{2} \quad (5)$$

$$-\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{3}; \text{ බැවින් } \theta = -\frac{\pi}{12} \quad (5)$$

$$\therefore z = \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}$$

5

20

14.(a) $x \neq -1$ සඳහා $f(x) = \frac{8x}{(x+1)(x^2+3)}$ යැයි ගනිමු.

$$x \neq -1 \text{ සඳහා } f'(x) = \frac{8(1-x)(2x^2+3x+3)}{(x+1)^2(x^2+3)^2} \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

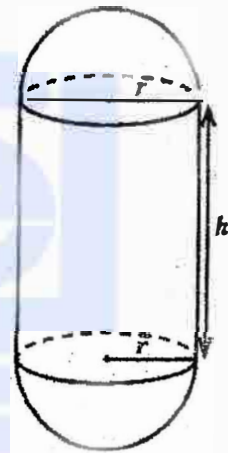
හැරුම් ලක්ෂ්‍ය හා ස්පර්ශකේන්ද්‍රය දක්වමින් $y=f(x)$ හි ප්‍රස්ථාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

$y=f(x)$ හි ප්‍රස්ථාරය භාවිතයෙන් $(x+1)(x^2+3) = 16x$ සමීකරණයේ විසඳුම් ගණන සොයන්න.

(b) අරය මීටර r වූ කුහර අර්ධ ගෝල දෙකක්, එම අරය ම සහිත උස මීටර h වූ සෘජු වෘත්ත කුහර සිලින්ඩරයකට රූපයේ දැක්වෙන පරිදි දෘඪ ලෙස සම්බන්ධ කිරීමෙන් කුහර සංයුක්ත වස්තුවක් සෑදිය යුතු වේ. සංයුක්ත වස්තුවේ මුළු පරිමාව $36\pi \text{ m}^3$ වේ. $h = \frac{108-4r^3}{3r^2}$ බව පෙන්වන්න.

ද්‍රව්‍ය සඳහා යන විශදම් සිලින්ඩරාකාර පෘෂ්ඨය සඳහා වර්ග මීටරයකට රූපියල් 300 ක් ද අර්ධ ගෝලීය පෘෂ්ඨය සඳහා වර්ග මීටරයකට රූපියල් 1000 ක් ද වේ. මෙම සංයුක්ත වස්තුව සෑදීමට අවශ්‍ය ද්‍රව්‍ය සඳහා ශත මුළු විශදම් රූපියල් C යන්න $0 < r < 3$ සඳහා $C = 800\pi \left(4r^2 + \frac{27}{r}\right)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

C අවම වන පරිදි r හි අගය සොයන්න.



$$(a) f(x) = \frac{8x}{(x+1)(x^2+3)}; x \neq -1 \text{ ලෙස ගනිමු.}$$

$x \neq -1$, සඳහා

$$f'(x) = \frac{(x+1)(x^2+3) \cdot 8 - 8x[(x^2+3) + (x+1) \cdot 2x]}{(x+1)^2(x^2+3)^2} \quad (15)$$

$$= \frac{8(x^2+3) - 16x^2(x+1)}{(x+1)^2(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{8[3 - x^2 - 2x^3]}{(x+1)^2(x^2+3)^2} \quad (10)$$

$$= \frac{8(1-x)(2x^2+3x+3)}{(x+1)^2(x^2+3)^2}$$

25

5

5

හැරුම් ලක්ෂ්‍ය : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ($\because 2x^2+3x+3 \neq 0$)

සියලු x සඳහා $2x^2 + 3x + 3 > 0$ බැවින් සියලු $x \neq 1$ සඳහා $\frac{8(2x^2 + 3x + 3)}{(x+1)^2(x^2 + 3)^2} > 0$ වේ.

එබැවින් $x = \pm 1$ සඳහා $f'(x)$ හි ලකුණ $(1-x)$ හි ලකුණම වේ.

	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < \infty$
$f'(x)$ හි ලකුණ	(+)	(+)	(-)
	$f(x)$ වැඩිවේ.	$f(x)$ වැඩිවේ.	$f(x)$ අඩුවේ.

$x = 1$ හිදී $f'(x)$ අර්ථ නොදක්වේ.

එනමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්ථාරයට ඇත්තේ එකම නැරඹී ලක්ෂ්‍යයක් පමණි; එය සාපේක්ෂ උපරිමයක් වන අතර එහි ඛණ්ඩාංක $(1, 1)$ වේ.

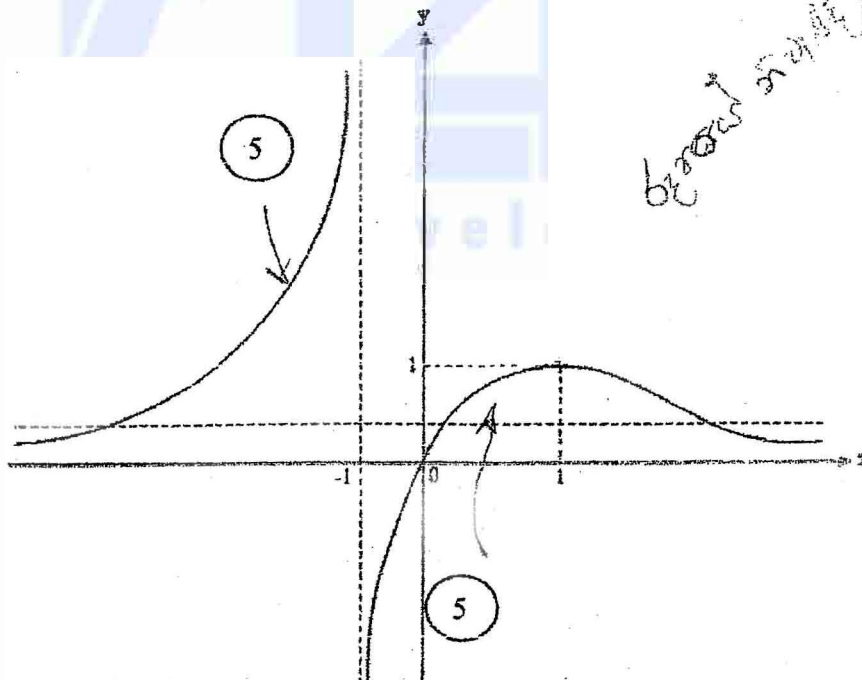
සිරස් ස්පර්ශකෝන්මුඛය : $f(x)$ අර්ථ නොදක්වන්නේ $x = -1$ දී පමණි.

තවද, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ හා $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ වේ.

එබැවින් $x = -1$. එකම සිරස් ස්පර්ශකෝන්මුඛය වේ.

තිරස් ස්පර්ශකෝන්මුඛය: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ වේ.

$\therefore y = 0$ එකම තිරස් ස්පර්ශකෝන්මුඛය වේ.



55

$$(x+1)(x^3+3)=16x \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{8x}{(x+1)(x^3+3)}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2} \quad (5)$$

අවශ්‍ය විසඳුම් සංඛ්‍යාව $y = f(x)$ හා $y = \frac{1}{2}$ ප්‍රස්තාරවල ඡේදන ලක්ෂ්‍ය ගණන වේ.

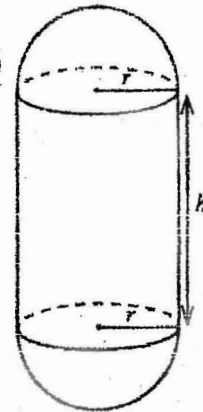
ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් මගින් මෙම සංඛ්‍යාව 3 කි. (5)

(b) සංයුක්ත වස්තුවේ මුළු පරිමාව $= \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h$ (10)

$$\frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h = 36\pi \text{ බව දී ඇත.} \quad (5)$$

$$\Rightarrow 4r^3 + 3r^2 h = 108 \quad (5)$$

$$\rightarrow h = \frac{108 - 4r^3}{3r^2} \quad (5)$$



දැන්, $h > 0 \Rightarrow r < 3$. එබැවින් $0 < r < 3$ විය යුතුය. (5)
 ද්‍රව්‍ය සඳහා යන මුළු වියදම

$$C = 300 \times 2\pi r h + 1000 \times 4\pi r^2 \quad (5)$$

$$= 200\pi \left\{ 3r \left(\frac{108 - 4r^3}{3r^2} \right) + 20r^2 \right\} \quad (5)$$

$$= 800\pi \left\{ 4r^2 + \frac{27}{r} \right\}; \quad 0 < r < 3. \quad (15)$$

$$\frac{dC}{dr} = 800\pi \left\{ 8r - \frac{27}{r^2} \right\}. \quad (5)$$

$$\therefore \frac{dC}{dr} = 0 \Leftrightarrow 8r = \frac{27}{r^2} \Leftrightarrow r = \frac{3}{2} \quad (5)$$

$$0 < r < \frac{3}{2} \text{ සඳහා } \frac{dC}{dr} < 0 \text{ හා}$$

$$\frac{3}{2} < r < 3 \text{ සඳහා } \frac{dC}{dr} > 0. \quad (5)$$

එනමින් $r = \frac{3}{2}$ වන විට C අවම වේ. (5)

10

20

15

25

15.(a) $\int \frac{3x+2}{x^2+2x+5} dx$ සොයන්න.

(b) සොයන්න වශයෙන් අනුකූලතා භාවිතයෙන් $\int_1^{e^\pi} \cos(\ln x) dx = -\frac{1}{2}(e^\pi + 1)$ බව පෙන්වන්න.

(c) $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ සත්‍ය පිහිටුවන්න; මෙහි a යනු නිශ්චයයකි.

$p(x) = (x-\pi)(2x+\pi)$ යැයි ද $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{p(x)} dx$ යැයි ද ගනිමු.

ඉහත ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{p(x)} dx$ බව පෙන්වන්න.

I සඳහා වූ ඉහත අනුකූල දෙක භාවිතයෙන් $I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{p(x)} dx$ බව අපේක්ෂා කරන්න.

එ නිසාම $I = \frac{1}{6\pi} \ln\left(\frac{1}{4}\right)$ බව පෙන්වන්න.

$$(a) \int \frac{3x+2}{x^2+2x+5} dx$$

$$= \int \frac{3(x+1)-1}{x^2+2x+5} dx \quad (05)$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx - \int \frac{1}{(x+1)^2+4} dx \quad (05)$$

$$= \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C, \text{ මෙහි } C \text{ යනු අනිශ්චිත නිශ්චයයකි.}$$

(05)

(05)

(05)

$[x^2+2x+5 > 0$ බව භද්‍රතා ගන්න.]

25

$$(b) I = \int_1^{e^\pi} \cos(\ln x) dx$$

$$= \int_1^{e^\pi} \cos(\ln x) \frac{dx}{dx} dx \quad (05)$$

$$= x \cos(\ln x) \Big|_1^{e^\pi} + \int_1^{e^\pi} x \sin(\ln x) \frac{1}{x} dx \quad (05)$$

$$= e^\pi \cos(\ln e^\pi) - \cos(\ln 1) + \int_1^{e^\pi} \sin(\ln x) \frac{dx}{dx} dx \quad (05)$$

$$= e^\pi \cos \pi - \cos 0 - x \sin(\ln x) \Big|_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} x \cos(\ln x) \frac{1}{x} dx \quad (05)$$

$$= -e^\pi - 1 - \sin(\ln 1) - I \quad (05)$$

$$2I = -e^\pi - 1$$

$$\therefore I = -\frac{1}{2}(e^\pi + 1) \quad (05)$$

50

(c) $u = a - x$ යැයි ගනිමු. එවිට $x = a - u$ හා $\frac{dx}{du} = -1 \Rightarrow dx = -du$ වේ. $x = a$ විට $u = 0$ ද $x = 0$ විට $u = a$ ද වේ.

$$\int_0^a f(x) dx = \int_a^0 f(a-u)(-du) = \int_a^0 f(a-u) du = \int_0^a f(a-x) dx$$

05

05

05

15

$$p(x) = (x - \pi)(2x + \pi)$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{p(x)} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}{p \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} dx \quad (\text{ඉහත ප්‍රතිඵලයෙන්})$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{p \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{p(x)} dx$$

05

10

$$\therefore p \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \left(\frac{\pi}{2} - x - \pi \right) \left(2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \pi \right) = -\frac{1}{2} (2x + \pi) 2(\pi - x) = (x - \pi)(2x + \pi) = p(x)$$

20

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{p(x)} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{p(x)} dx$$

05

$$\therefore I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{p(x)} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{p(x)} dx$$

05

10

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(x - \pi)(2x + \pi)} dx$$

05

05

(සටහන: 10 නින්න හාග වෙනුවෙන්)

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{1/3\pi}{(x - \pi)} - \frac{2/3\pi}{(2x + \pi)} \right\} dx = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3\pi} \ln|x - \pi| - \frac{2}{3\pi} \times \frac{1}{2} \ln|2x + \pi| \right\} \Big|_0^{\pi/2}$$

05

5

$$= \frac{1}{6\pi} \left\{ \ln \left| -\frac{\pi}{2} \right| - \ln|-\pi| - \ln|2\pi| + \ln|\pi| \right\}$$

05

$$I = \frac{1}{6\pi} \left\{ \ln \frac{\pi}{2} - \ln 2\pi \right\}$$

$$= \frac{1}{6\pi} \ln \left(\frac{\pi}{2\pi} \right) = \frac{1}{6\pi} \ln \left(\frac{1}{2} \right)$$

05

30

16. l_1 හා l_2 යනු පිළිවෙලින් $2x+y=5$ හා $x+2y=4$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා යැයි ගනිමු. l_1 හා l_2 අතර සුළු කෝණය $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ බව පෙන්වා, මෙම කෝණයේ සම්විෂේෂකයේ සමීකරණය සොයන්න.

l_1 හා l_2 හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය A හැයි ද $R = \{(x,y) : x+2y \leq 4 \text{ හා } 2x+y \geq 5\}$ යැයි ද ගනිමු. A ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයා, R පෙදෙස xy - තලයෙහි අඳුරු කරන්න.

l_1 හා l_2 රේඛා දෙක ම ස්පර්ශ කරමින් R පෙදෙසෙහි පිහිටන අරය $\sqrt{5}$ ක් වූ S වෘත්තයේ සමීකරණය $x^2+y^2-14x+8y+60=0$ බව පෙන්වන්න.

ස්පර්ශ ජායා සඳහා සුදුරුදු සූත්‍රය භාවිතයෙන්, A ලක්ෂ්‍යයේ සිට S වෘත්තයට ඇදී ස්පර්ශකවල ස්පර්ශ ජායායේ සමීකරණය $x-y=10$ බව පෙන්වන්න.

A ලක්ෂ්‍යය ද l_1 හා l_2 සමග S හි ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍ය ද ඔස්සේ යන වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

m_1 හා m_2 යනු පිළිවෙලින් l_1 හා l_2 හි බෑවුම් යැයි ගනිමු. එවිට $m_1 = -2$ හා $m_2 = -\frac{1}{2}$ වේ.

l_1 හා l_2 අතර කෝණය θ යැයි ගනිමු.

එවිට, $\tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ (05)

(05)
$$= \frac{-2 - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + (-2)\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-\frac{3}{2}}{2} = -\frac{3}{4}$$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

20

කෝණ සම්විෂේෂක

$$\frac{|2x+y-5|}{\sqrt{5}} = \frac{|x+2y-4|}{\sqrt{5}}$$
 (10)

i.e. $2x+y-5 = \pm(x+2y-4)$ (05)

$-x+y+1=0$ or $3x+3y-9=0$

$x-y-1=0$ or $x+y-3=0$

(05)

(05)

l_1 හා $x-y-1=0$ අතර සුළු කෝණය α යැයි ගනිමු.

එවිට, $\tan \alpha = \frac{-2-1}{1+(-2)(1)} = 3 > 1$ (05)

එම නිසා, $x-y-1=0$ අවශ්‍ය සම්විෂේෂකය නොවේ.

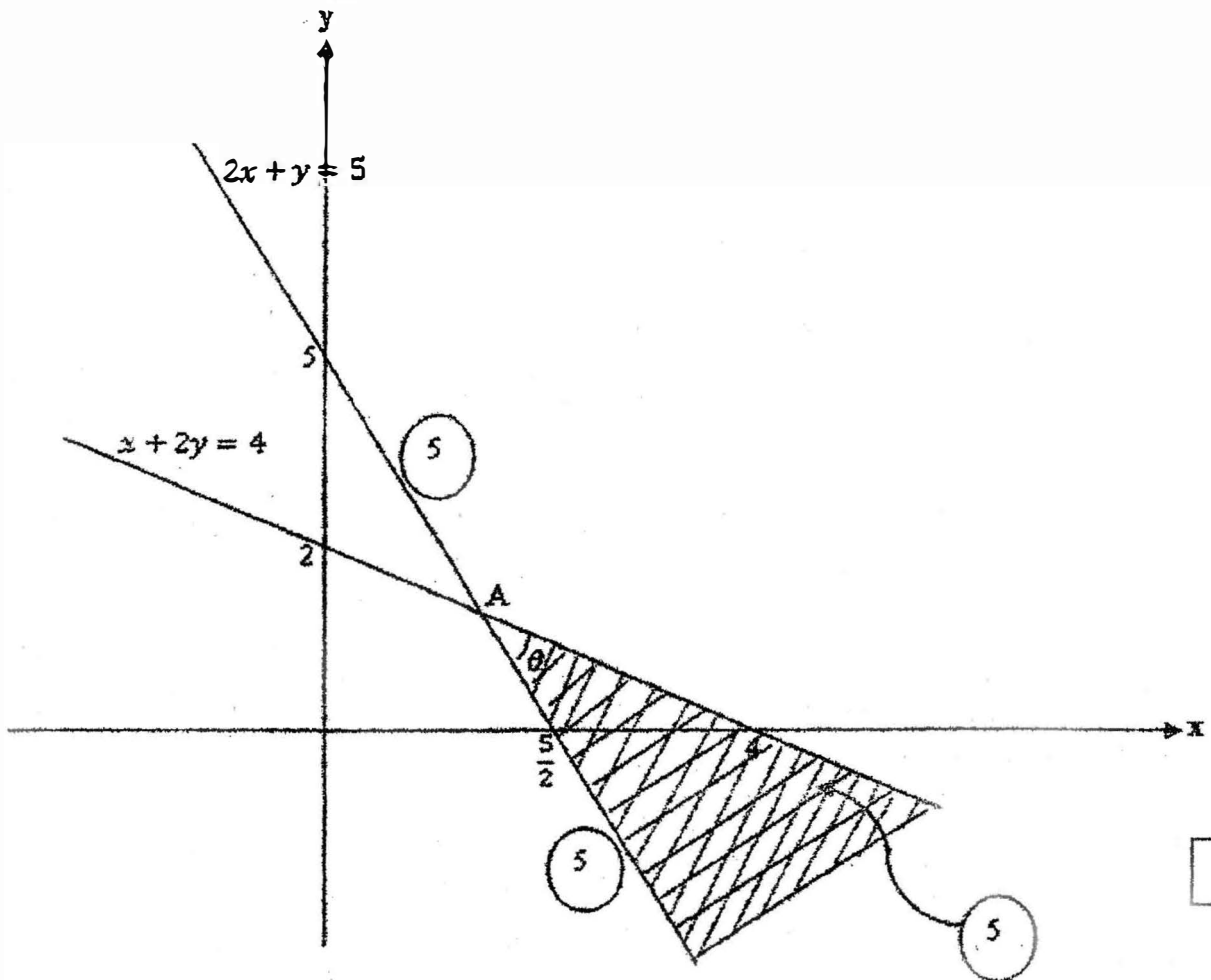
$\therefore x+y-3=0$ අවශ්‍ය සම්විෂේෂකය වේ. (05)

35

$2x + y = 5$ හා $x + 2y = 4$ සමගාමීව විසඳීමෙන්, $x = 2$ හා $y = 1$ ලැබේ.

$\therefore A \equiv (2, 1)$.

05



20

S හි කේන්ද්‍රය $x + y - 3 = 0$ මත පිහිටිය යුතුය.

එවිට S හි කේන්ද්‍රය $(2+t, 1-t)$ ආකාරයට ලිවිය හැක.

05

S හි අරය $\sqrt{5}$ බැවින්, $\frac{|2(2+t) + (1-t) - 5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

10

$|t| = 5$

$t = \pm 5$

05

$C \equiv (7, -4)$ හෝ $(-3, 6)$; දෙවැනි ලක්ෂ්‍යය R තුළ නොපිහිටයි.

05

05

S හි සමීකරණය

$$(x-7)^2 + (y+4)^2 = 5$$

05

$$x^2 - 14x + 49 + y^2 + 8y + 16 = 5$$

$$x^2 + y^2 - 14x + 8y + 60 = 0$$

05

40

වෙනත් ක්‍රමයක්

$$C \equiv (t', 3-t') \quad (05)$$

S හි අරය $\sqrt{5}$ බැවින්,

$$\frac{|2t' + (3-t'-5)|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \quad (10)$$

$$|t' - 2| = 5$$

$$t' = 7 \text{ or } t' = -3 \quad (05)$$

$C \equiv (7, -4)$ හෝ $(-3, 6)$; දෙවැනි ලක්ෂ්‍යය R තුළ නොපිහිටයි. (05)

(05)

S හි සමීකරණය:

$$(x-7)^2 + (y+4)^2 = 5 \quad (05)$$

$$x^2 - 14x + 49 + y^2 + 8y + 16 = 5$$

$$x^2 + y^2 - 14x + 8y + 60 = 0 \quad (05)$$

40

(05)

$x_0 = 2, y_0 = 1, g = -7, f = 4, c = 60$ සමග $x_0x + y_0y + g(x+x_0) + f(y+y_0) + c = 0$ මගින් $2x + y - 7(x+2) + 4(y+1) + 60 = 0$ ලැබේ.

i.e. $-5x + 5y = -50$

$$x - y = 10 \quad (05)$$

10

අවශ්‍ය වෘත්තයෙහි සමීකරණය,

$$x^2 + y^2 - 14x + 8y + 60 + \lambda(x - y - 10) = 0 \quad (10)$$

ආකාරයට ලිවිය හැක.

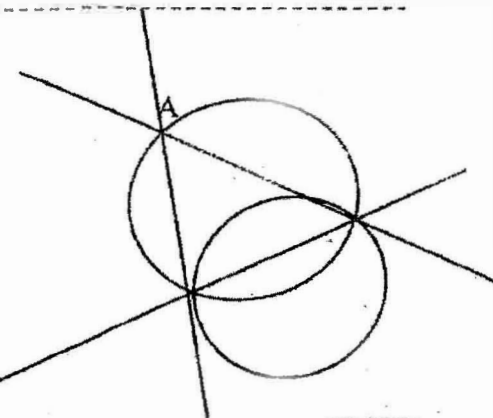
$A \equiv (2, 1)$ මෙම වෘත්තය මත වේ.

$$\therefore 4 + 1 - 28 + 8 + 60 + \lambda(x - y - 10) = 0 \quad (05)$$

$$45 - 9\lambda = 0$$

$$\lambda = 5 \quad (05)$$

එම නිසා අවශ්‍ය වෘත්තය: $x^2 + y^2 - 9x + 3y + 10 = 0 \quad (05)$



25

17.(a) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $f(x) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan^2 x}$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ යන්න $A \cos(2x + \alpha) + B$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $A(>0)$, B හා α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) නිර්ණය කළ හැකි නියත වේ.

ඒ හැරී, $f(x) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$ යන සමීකරණය විසඳන්න.

$f(x)$ සඳහා දෙන ලද මුල් ප්‍රකාශනය යොදා ගනිමින් $f(x) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$ යන්න $2 \tan^2 x + 4k \tan x - k^2 = 0$ ආකාරයට ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $k = 2 - \sqrt{2}$ වේ.

$\tan \frac{\pi}{24} = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$ බව අපෝහනය කරන්න.

තවද $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $y = 2f(x)$ හි ප්‍රස්ථාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

(b) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ත්‍රිකෝණයක් සඳහා හයිල් ගිණිම ප්‍රකාශ කරන්න.

ABC භ්‍රූ ත්‍රිකෝණයක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $a:b:c = 1:\lambda:\mu$ බව දී ඇත; මෙහි λ හා μ භ්‍රූ නියත වේ. $\mu^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 4\lambda \sin^3 C$ බව පෙන්වන්න.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x) &= \frac{1 - \tan x}{1 + \tan^2 x} \quad ; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ &= \cos^2 x \left(1 - \frac{\sin x}{\cos x} \right) = \cos^2 x - \sin x \cos x \quad (5) \\ (05) \quad &= \frac{1 + \cos 2x}{2} - \frac{\sin 2x}{2} \quad (05) \\ &= \frac{1}{2} \{ \cos 2x - \sin 2x \} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x \right\} + \frac{1}{2} \quad (05) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \cos \frac{\pi}{4} \cos 2x - \sin \frac{\pi}{4} \sin 2x \right\} + \frac{1}{2} \quad (05) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} \quad (05) \end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}, B = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{\pi}{4} \quad (05)$$

35

$$f(x) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \quad (05)$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}; n \in \mathbb{Z} \quad (05)$$

$$2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

$$2x = 2n\pi + \frac{\pi}{12} \text{ and } 2x = 2n\pi - \frac{7\pi}{12}$$

$$x = n\pi + \frac{\pi}{24} \text{ and } x = n\pi - \frac{7\pi}{24} \quad (05)$$

$$x = \frac{\pi}{24}, -\frac{7\pi}{24} \left(\because -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

(05)

20

$$\frac{1 - \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$4 - 4 \tan x = 2 + \sqrt{2} + (2 + \sqrt{2}) \tan^2 x$$

$$4 - (2 + \sqrt{2}) - 4 \tan x = (2 + \sqrt{2}) \tan^2 x \dots\dots\dots (i) \quad (05)$$

$$(i) \times (2 - \sqrt{2}) \Rightarrow$$

$$(2 - \sqrt{2})^2 - 4(2 - \sqrt{2}) \tan x = (2^2 - (\sqrt{2})^2) \tan^2 x$$

$$2 \tan^2 x + 4(2 - \sqrt{2}) \tan x - (2 - (\sqrt{2}))^2 = 0 \quad (05)$$

$$2 \tan^2 x + 4k \tan x - k^2 = 0, \text{ මෙහි, } k = (2 - \sqrt{2}), \quad (05)$$

15

(05)

$$\tan x = \frac{-4k \pm \sqrt{16k^2 + 8k^2}}{4} = \frac{-2k \pm \sqrt{6}k}{2}$$

(05)

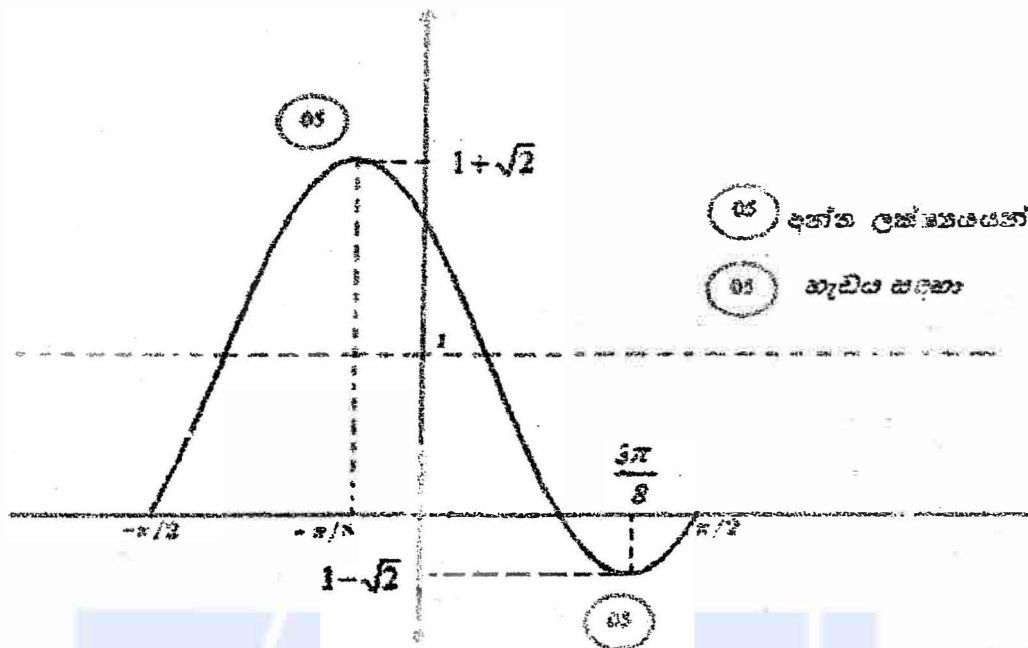
$$\tan \frac{\pi}{24} = -(2 - \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{6}}{2}(2 - \sqrt{2}); \left(\because \tan \frac{\pi}{24} > 0 \right) \quad (05)$$

$$= \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2 \quad (05)$$

20

$$y = 2f(x)$$

$$= \sqrt{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + 1; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$



20

(b) සයිනස් සූත්‍රයෙන්: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

05

05

$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2 \sin(A+B) \cos(A-B) + 2 \sin C \cos C$

$= 2 \sin C \cos(A-B) - 2 \sin C \cos(A+B)$

$= 2 \sin C [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

$= 4 \sin C \sin A \sin B$

$= 4 \sin C \frac{\sin A}{a} \cdot \frac{\sin B}{b} \cdot ab$

$= 4 \sin C \frac{\sin C}{c} \cdot \frac{\sin C}{c} \cdot ab$

$\Rightarrow c^2 (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 4ab \sin^3 C$

$\mu^2 a^2 (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 4a\lambda a \sin^3 C \quad (\because a:b:c=1:\lambda:\mu)$

$\mu^2 (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 4\lambda \sin^3 C$

35