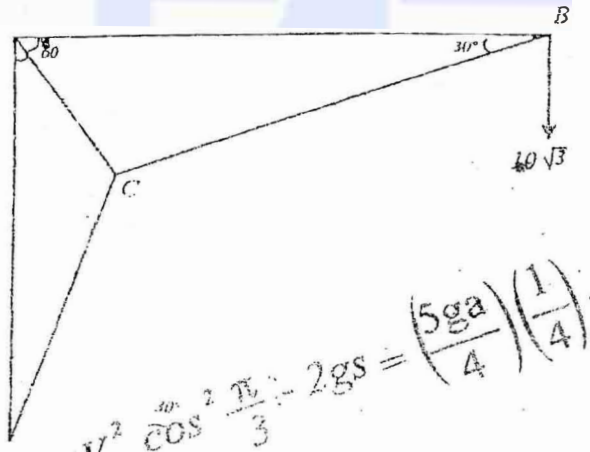
www.AlevelApi.com

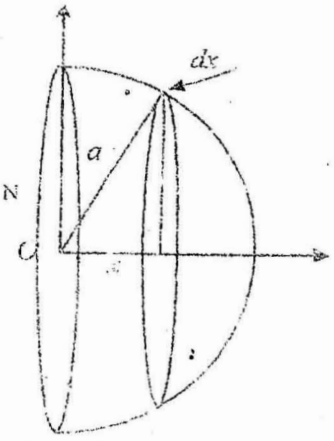
නව

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
ජාතික ඇගයීම් හා පරීක්ෂණ සේවාව

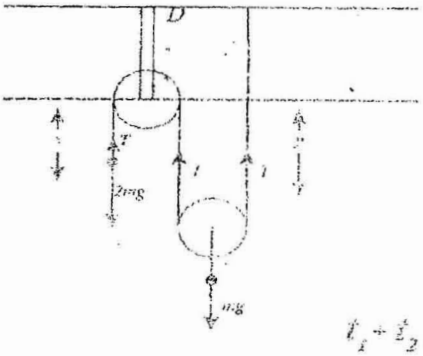
අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර
(උසස් පෙළ) විභාගය - 2011

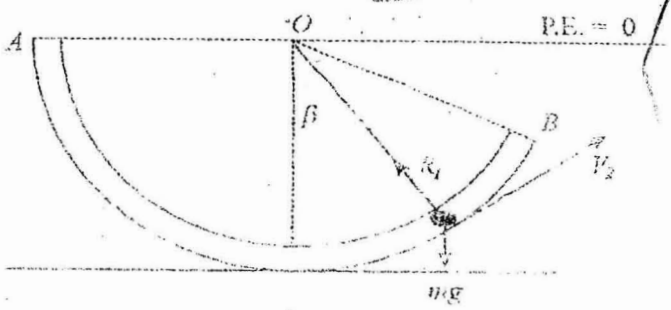
ලකුණු දීමේ පටිපාටිය





$$0 = V_3^2 \cos^2\frac{\pi}{3} - 2gs = \left(\frac{5ga}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) - 2gs$$





$$t_1 + t_2 = \left(\sqrt{3} - 1\right)\sqrt{\frac{l}{g}} + \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{1}{3}\left(3\sqrt{3} - 3 + 2\pi\right)\sqrt{\frac{l}{g}}$$

10 - සංයුක්ත ගණිතය - I

මෙය උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා සකස් කෙරිණි. ප්‍රධාන පරීක්ෂක සාකච්ඡා පැවැත්වෙන අවස්ථාවේ දී ඉදිරිපත් වන අදහස් අනුව මෙහි ඇතැම් වෙනස්කම් කරනු ලැබේ. මෙය පන්ති කාමර ඉගෙනුම් ක්‍රියාවලිය සඳහා ආධාරකයක් ලෙස යොදා ගත හැකිය යනු අපගේ විශ්වාසයයි.

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත .

1. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා n^3+5n යන්න 3 න් බෙදෙන බව සාධනය කරන්න.

$P(n) = n^3 + 5n$ යැයි ගනිමු.

$n = 1$ විට, $P(1) = 1+5 = 6$ බැවින් එය 3 න් බෙදේ. (05)

එබැවින්, ප්‍රතිඵලය $n = 1$ ට සත්‍ය වේ.

$n = k$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එනම්, $P(k) = k^3 + 5k$ යන්න 3 න් බෙදේ යැයි උපකල්පනය කරමු. (05)

$n = k + 1$ යැයි ගනිමු.

එවිට $P(k+1) = (k+1)^3 + 5(k+1)$

$= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5$ (05)

$= k^3 + 5k + 3(k^2 + 1k + 2)$; $k^3 + 5k$ යන්න 3 න් බෙදෙන බැවින් මෙය 3 න් බෙදේ. (5)

එබැවින්, ප්‍රතිඵලය $n = k + 1$ ට සත්‍ය වේ.

ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් සැම $n \in Z^+$ සඳහා $n^3 + 5n$ යන්න 3 න් බෙදේ.

(05) 25

---

2. 1, 2, 3 හා 4 සංඛ්‍යාංක යොදාගෙන 2000 හා 4000 අතර සංඛ්‍යා කොපමණ ගණනක්, සංඛ්‍යාංක පුනරාවර්තනයට (i) ඉඩ නැති විට, (ii) ඉඩ ඇති විට, ඇදිය හැකි දැයි සොයන්න.

(5)

(i) පළමු සංඛ්‍යාංකය තෝරා ගත හැකි ආකාර 2 ක් ඇති අතර අනෙක් සංඛ්‍යාංක තුන තෝරා ගත හැකි ආකාර ගණන $3 \times 2 \times 1 = 6$ ක් වේ. (05)

එබැවින්, 1, 2, 3 හා 4 සංඛ්‍යාංක පුනරාවර්තනය රහිතව යොදාගෙන, 2000 හා 4000 අතර සංඛ්‍යාවක් තෝරා ගත හැකි ආකාර ගණන $2 \times 6 = 12$ ක් වේ. (05)

(ii) පළමු සංඛ්‍යාංකය තෝරා ගත හැකි ආකාර 2 ක් ඇති අතර අනෙක් සංඛ්‍යාංක තුන තෝරා ගත හැකි ආකාර ගණන $4 \times 4 \times 4 = 64$ ක් වේ. (5)

එබැවින්, 1, 2, 3 හා 4 සංඛ්‍යාංක පුනරාවර්තනය සහිතව යොදාගෙන, 2000 හා 4000 අතර සංඛ්‍යාවක් තෝරා ගත හැකි ආකාර ගණන $2 \times 64 = 128$ ක් වේ. (05)

25

---

3. ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා ද්විපද ප්‍රසාරණය යොදාගනිමින්, $\left(1+\sqrt{3}\right)^6 + \left(1-\sqrt{3}\right)^6 = 416$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\left(1+\sqrt{3}\right)^6$ හි පූර්ණ සංඛ්‍යාමය කොටස සොයන්න.

$\left(1+\sqrt{3}\right)^6 = {}^6C_0 + {}^6C_1\sqrt{3} + {}^6C_2\left(\sqrt{3}\right)^2 + {}^6C_3\left(\sqrt{3}\right)^3 + {}^6C_4\left(\sqrt{3}\right)^4 + {}^6C_5\left(\sqrt{3}\right)^5 + {}^6C_6\left(\sqrt{3}\right)^6$ (05)

$\left(1-\sqrt{3}\right)^6 = {}^6C_0 - {}^6C_1\sqrt{3} + {}^6C_2\left(\sqrt{3}\right)^2 - {}^6C_3\left(\sqrt{3}\right)^3 + {}^6C_4\left(\sqrt{3}\right)^4 - {}^6C_5\left(\sqrt{3}\right)^5 + {}^6C_6\left(\sqrt{3}\right)^6$ (05)

$\left(1+\sqrt{3}\right)^6 + \left(1-\sqrt{3}\right)^6 = 2\left\{{}^6C_0 + {}^6C_2\left(\sqrt{3}\right)^2 + {}^6C_4\left(\sqrt{3}\right)^4 + {}^6C_6\left(\sqrt{3}\right)^6\right\}$

$= 2\{1 + 15 \times 3 + 15 \times 9 + 27\}$ (05)

$= 2\{1 + 180 + 27\} = 416$ (05) 20

$\left(1+\sqrt{3}\right)^6 = 416 - \left(1-\sqrt{3}\right)^6$

$0 < \left(1-\sqrt{3}\right)^6 < 1 \quad \because 0 < \sqrt{3} - 1 < 1$

එබැවින්, $\left(1+\sqrt{3}\right)^6$ හි නිඛිල කොටස 415 වේ. (05) 05

Alevel Lapi උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.

(4.) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+3\sin x}-\sqrt{4-3\sin x}}{2x}=\frac{3}{4}$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+3\sin x}-\sqrt{4-3\sin x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+3\sin x}-\sqrt{4-3\sin x}}{2x}\times\frac{\sqrt{4+3\sin x}+\sqrt{4-3\sin x}}{\sqrt{4+3\sin x}+\sqrt{4-3\sin x}}$$ (05)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4+3\sin x-(4-3\sin x)}{2x}\times\frac{1}{\sqrt{4+3\sin x}+\sqrt{4-3\sin x}}$$ (05)

$$=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+3\sin x}+\sqrt{4-3\sin x}}=(3\times 1)\times\left(\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}\right)=\frac{3}{4}$$

සොලිතා නිසා ලැබුණු (05) (05) (05) 25

(5.) $\frac{d}{dx}\left\{e^{2x}(A\sin 3x+B\cos 3x)\right\}=13e^{2x}\sin 3x$ වන පරිදි A හා B නියත සොයන්න.

ඒ නයින්, $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$ සොයන්න.

$$\frac{d}{dx}\left\{e^{2x}(A\sin 3x+B\cos 3x)\right\}$$

$$=e^{2x}(3A\cos 3x-3B\sin 3x)+2e^{2x}(A\sin 3x+B\cos 3x)$$ (05)

$$=e^{2x}\left\{(3A+2B)\cos 3x+(2A-3B)\sin 3x\right\}$$

$=13e^{2x}\sin 3x$ වන්නේ $3A+2B=0$ හා $2A-3B=13$ එවිට, $A=2$ හා $B=-3$ නම් හා එසේනම් ම පමණි. (05) 15

නයින්, $\int e^{2x}\sin 3x\,dx=e^{2x}\left(\frac{2}{13}\sin 3x-\frac{3}{13}\cos 3x\right)+C$; මෙහි C යනු අගිමත නියතයකි. not necessary

(05) (05) 10

(6.) $3y+2x+5=0$ සරල රේඛාවට සමාන්තර වූ ද, $(2, 3)$ හා $(-1, 2)$ ලක්ෂ්‍ය යා කරන සරල රේඛාව $3:2$ අනුපාතයට බාහිරව බෙදන ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන්නා වූ ද සරල රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

අවශ්‍ය සරල රේඛාව $3y+2x+5=0$ සරල රේඛාවට සමාන්තර බැවින් අවශ්‍ය සරල රේඛාවේ සමීකරණය $3y+2x+c=0$ ලෙස ලිවිය හැකිය; මෙහි c යනු නිර්ණය කළ යුතු නියතයකි. (05)

(x_0, y_0) යනු $(2, 3)$ හා $(-1, 2)$ ලක්ෂ්‍ය යා කරන සරල රේඛාව $3:2$ අනුපාතයට බාහිරව බෙදන ලක්ෂ්‍යයේ බණ්ඩාංක යැයි ගනිමු.

එවිට, $x_0=\frac{2\times 2+(-3)\times(-1)}{-3+2}=-7$ හා $y_0=\frac{2\times(3)+(-3)\times(2)}{-3+2}=0$ වේ.

(05) (05)

$(-7, 0)$ ලක්ෂ්‍යය රේඛාව මත පිහිටන බැවින් $3(0)+2(-7)+c=0$ වන අතර එයින් $c=14$ ලැබේ. (05)

එබැවින්, අවශ්‍ය සරල රේඛාවේ සමීකරණය $3y+2x+14=0$ වේ. (05) 25

(7.) වක්‍රයක් $x=3t$, $y=\frac{3}{t}$ මගින් දෙනු ලැබේ; මෙහි t යනු නිශ්-ශූන්‍ය පරාමිතියකි. වක්‍රයට, $\left(3t, \frac{3}{t}\right)$ ලක්ෂ්‍යයේදී ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $x+t^2y=6t$ බව පෙන්වන්න.

t විචලනය වන විට, බණ්ඩාංක අක්ෂ හා මෙම ස්පර්ශකය මගින් සපරියන්න ත්‍රිකෝණාකාර පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය නියතයක් බව අපෝහනය කරන්න.

Alevel ලාභ උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{3}{t^2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{t^2}$. (05)

ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $\frac{\left(y-\frac{3}{t}\right)}{(x-3t)} = -\frac{1}{t^2}$ වේ. (05)

i.e. $x + t^2 y = 6t$. [15]

මෙම ස්පර්ශකය x-අක්ෂය $A = \left(6, \frac{6}{t}\right)$ හි දී ද, y-අක්ෂය $B = (6t, 0)$ හි දී ද කපයි. (05)

OAB ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $\frac{1}{2}\times 6t \times \left(\frac{6}{t}\right) = 18$ sq. unit වන අතර එය t මගින් ස්වායත්ත වේ. (05) [10]

---

8. $x+y+1=0$ සරල රේඛාව ස්පර්ශ කරන්නා වූ ද, කේන්ද්‍රය y-අක්ෂය මත පිහිටියා වූ ද, එක එකක අරය $\sqrt{2}$ වූ ද වෘත්ත දෙකෙහි සමීකරණ ව්‍යුත්පන්න කරන්න.

වෘත්ත එක එකක කේන්ද්‍රය $(0, b)$ ආකාරයේ වේ. (05)

$(0, b)$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට $x + y + 1 = 0$ රේඛාවට ලම්බ දූර $\left|\frac{b+1}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{2}$ වේ. (05)

$\Rightarrow (b+1)^2 = 4 \Rightarrow b^2 + 2b - 3 = 0 \Rightarrow b = 1$ හෝ -3 වේ. (05)

එබැවින්, වෘත්ත දෙකෙහි සමීකරණ $x^2 + (y-1)^2 = 2$ හා $x^2 + (y+3)^2 = 2$ වේ. (05) (05) [25]

---

9. P ලක්ෂ්‍යයක සිට $x^2 + y^2 - 12x = 0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ දිග, P ලක්ෂ්‍යයේ සිට $x^2 + y^2 - 9 = 0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ දිග මෙන් දෙගුණයකි. P ලක්ෂ්‍යය $x^2 + y^2 + 4x - 12 = 0$ වෘත්තය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

$P = (\alpha, \beta)$ යැයි ගනිමු.

P ලක්ෂ්‍යයේ සිට $x^2 - 12x + y^2 = 0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ දිග $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 12\alpha}$ වේ. (05)

P ලක්ෂ්‍යයේ සිට $x^2 + y^2 - 9 = 0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ දිග $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 9}$ වේ. (05)

$\alpha^2 - 12\alpha + \beta^2 = 4\left(\alpha^2 + \beta^2 - 9\right)$. (05)

i.e. $3\alpha^2 + 3\beta^2 + 12\alpha - 36 = 0$.

i.e. $\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha - 12 = 0$. (05)

එබැවින්, P ලක්ෂ්‍යය $x^2 + y^2 + 4x - 12 = 0$ වෘත්තය මත පිහිටයි. (05) [25]

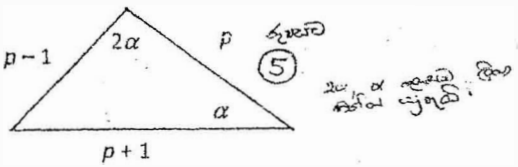
---

10. ත්‍රිකෝණයක පාද $p-1$, p හා $p+1$ වෙයි; මෙහි p යනු $p>1$ වන පරිදි වූ නිඛිල සංඛ්‍යාවකි. ත්‍රිකෝණයේ **විශාලතම කෝණය, කුඩාතම කෝණය** මෙන් දෙගුණයක් නම්, **සයින් නීතිය** හා **කෝසයින් නීතිය** යොදාගනිමින් p හි අගය සොයන්න.

සයින් නීතිය යෙදීමෙන්

$\frac{\sin\alpha}{p-1} = \frac{\sin 2\alpha}{p+1} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{p+1}{2(p-1)}$ ලැබේ.

(05) (05)



කෝසයින් නීතිය යෙදීමෙන්

$\cos\alpha = \frac{(p+1)^2 + p^2 - (p-1)^2}{2p(p+1)} = \frac{p+4}{2(p+1)}$ ලැබේ.

(05)

එබැවින්, $\frac{p+1}{2(p-1)} = \frac{p+4}{2(p+1)} \Rightarrow p^2 + 2p + 1 = p^2 + 3p - 4 \Rightarrow p = 5$ ලැබේ. (05) [25]

Alevel Lapis උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දේ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.

B	B කොටස	B

11 (a) α හා β යනු $ax^2+bx+c=0$, වර්ගජ සමීකරණයේ මූල යැයි ගනිමු; මෙහි a, b හා c යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ.

α හා β දෙකම

(i) $b^2-4ac \geq 0$ ම නම් පමණක් තාත්ත්වික,

(ii) $b=0$ හා $ac>0$ ම නම් පමණක් හුදෙක් අතාත්ත්වික

බව පෙන්වන්න.

මූල α^2 හා β^2 වන වර්ගජ සමීකරණය සොයන්න.

එක්කෝ α හා β දෙකම තාත්ත්වික, නැත්නම් α හා β දෙකම හුදෙක් අතාත්ත්වික, ම නම් පමණක් මෙම වර්ගජ සමීකරණයේ මූල දෙකම තාත්ත්වික බව පෙන්වන්න.

(b) $f(x)=x^3-3abx-(a^3+b^3)$ යැයි ගනිමු; මෙහි a හා b යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ. $(x-a-b)$ යනු $f(x)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න. $f(x)$ හි අනෙක් සාධකය වර්ගජ ආකාරයෙන් සොයන්න.

ඒ නයින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, a හා b ප්‍රභින්න නම්, $f(x)=0$ ට තාත්ත්වික මූල එකක් පමණක් තිබෙන බව පෙන්වන්න.

$x^3-9x-12=0$ ට තාත්ත්වික මූල එකක් පමණක් තිබෙන බව අපෝහනය කර, එය සොයන්න.

(a) (i) $ax^2+bx+c=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right\}$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}$$

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \rightarrow (1)$ ම නම් පමණක් $ax^2+bx+c=0$ වේ. (10)

$\Leftrightarrow$

$b^2-4ac \geq 0$ ම නම් පමණක් (1) සමීකරණය සපුරාලනයේ x ට තාත්ත්වික අගයන් දෙකක් ඇත. (05)

අනිෂ්ඨයි: [එනම්, $b^2-4ac \geq 0$ ම නම් පමණක් $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (දෙකම තාත්ත්වික) වේ.]

එනම්, $b^2-4ac \geq 0$ ම නම් පමණක් $ax^2+bx+c=0$ ට තාත්ත්වික මූල ඇත. (05) $\boxed{20}$ ●

(ii) $b^2-4ac<0$ ම නම් පමණක් (1) සමීකරණය සපුරාලනයේ x ට සංකීර්ණ අගයන් දෙකක් ඇත. (05)

එනම්, $b^2-4ac<0$ ම නම් පමණක් $x=\frac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ (දෙකම සංකීර්ණ) වේ.

$b^2-4ac<0$ හා $b=0$ ම නම් පමණක් $x=\frac{\pm\sqrt{4ac-b^2}\,i}{2a}$ (දෙකම හුදෙක් අතාත්ත්වික) වේ. (05)

එනම්, $ac>0$ හා $b=0$ ම නම් පමණක් $x=\frac{\pm\sqrt{4ac-b^2}\,i}{2a}$ (දෙකම හුදෙක් අතාත්ත්වික) වේ. (05)

එනම්, $ac>0$ හා $b=0$ ම නම් පමණක් $ax^2+bx+c=0$ ට හුදෙක් අතාත්ත්වික මූල ඇත. (05) $\boxed{20}$ ▲

(a) (i) සඳහා වෙනත් ක්‍රමයක්:

α හා β යනු $ax^2+bx+c=0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල බැවින් $\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \rightarrow (1)$ හා

$\alpha\beta=\frac{c}{a}$ වේ. (05)

Alevel Api උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\left(-\frac{b}{c}\right)^2-4\left(\frac{c}{a}\right)=\frac{b^2-4ac}{a^2}$ (05)

$b^2-4ac\geq 0$ ම නම් පමණක් $\alpha-\beta=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$ → (2) වේ. (05) තාත්ත්වික

$ax^2+bx+c=0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ හා $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ බව (1) හා (2) න් ගම්‍ය වන අතර දෙකම තාත්ත්වික වේ. (05)

$b^2-4ac\geq 0$ ම නම් පමණක් මූල තාත්ත්වික වේ. [20]

(a) (ii) සඳහා වෙනත් ක්‍රමයක්:

$b^2-4ac<0$ ම නම් පමණක් $\alpha-\beta=\pm\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{a}i$ → (3) වේ. (05) සුදෙක් අතාත්ත්වික

සෙලිතුක්කාරනා

$ax^2+bx+c=0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල දෙක $\frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ හා $\frac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ බව (1) හා (3) න් ගම්‍ය වන අතර දෙකම සංකීර්ණ වේ. (05)

$b=0$ නම්, ඒවා එක එකක තාත්ත්වික කොටස ශුන්‍ය වන අතර ඒවා දෙකම සුදෙක් අතාත්ත්වික වේ. (05)

එනම්, $ac>0$ හා $b=0$ ම නම් පමණක් මූල දෙකම සුදෙක් අතාත්ත්වික (05) [20]

α^2 හා β^2 මූල වන වර්ගජ සමීකරණය $x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2\beta^2=0$ ලෙස ලිවිය හැකිය. (05)

එනම්, $x^2-\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}x+\alpha^2\beta^2=0$

එනම්, $x^2-\left\{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\left(\frac{c}{a}\right)\right\}x+\left(\frac{c}{a}\right)^2=0$ (05)

එනම්, $a^2x^2-(b^2-2ac)x+c^2=0$. (05) [15]

$\Delta=\{-(b^2-2ac)\}^2-4a^2c^2\geq 0$ ම නම් පමණක් මෙම වර්ගජ සමීකරණයේ මූල දෙකම තාත්ත්වික වේ. (05)

එනම්, $\{(b^2-2ac)-2ac\}\{(b^2-2ac)+2ac\}\geq 0$ ම නම් පමණක් මූල දෙකම තාත්ත්වික වේ.

එනම්, $b^2(b^2-4ac)\geq 0$ ම නම් පමණක් මූල දෙකම තාත්ත්වික වේ. (05)

එක්කෝ $(b^2-4ac)\geq 0$ හා b ඕනෑම තාත්ත්වික අගයක් ම නම් පමණක් නැත්නම් $b^2-4ac<0$ හා $b=0$ ම නම් පමණක් $b^2(b^2-4ac)\geq 0$ වේ. (10)

එනම්, එක්කෝ α හා β දෙකම තාත්ත්වික නැත්නම් α හා β දෙකම සුදෙක් අතාත්ත්වික ම නම් පමණක් $b^2(b^2-4ac)\geq 0$ වේ. (05)

ඒ නයින් ප්‍රතිඵලය ලැබේ. [25]

වෙනත් ක්‍රමයක්:

α හා β යනු $ax^2+bx+c=0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල වේ.

එබැවින්, α හා β දෙකම

(i) $b^2-4ac\geq 0$ ම නම් පමණක් තාත්ත්වික, (05)

(ii) $ac>0$ හා $b=0$ ම නම් පමණක් සුදෙක් අතාත්ත්වික, (05)

උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.

(iii) $b^2-4ac<0$ හා $b\neq 0$ ම තම පමණක් සංකීර්ණ (05)
වේ.

α හා β දෙකම සංකීර්ණ නම් α^2 හා β^2 දෙකම තාත්ත්වික විය නොහැකිය. (05)

α හා β දෙකම තාත්ත්වික හෝ දෙකම යුදෙක් අතාත්ත්වික ම තම පමණක් α^2 හා β^2 දෙකම තාත්ත්වික වේ. (05) 25

(b) $f(a+b)=(a+b)^3-3ab(a+b)-(a^3+b^3)=0$. (05)

එබැවින්, $(x-a-b)$ යනු $f(x)$ හි සාධකයක් වේ. 05

$f(x)=x^3-3abx-(a^3+b^3)=(x-a-b)(x^2+(a+b)x+a^2-ab+b^2$
(05) (05) (05) 15

$f(x)=(x-a-b)\left\{x^2+(a+b)x-3ab+(a+b)^2\right\}$

$f(x)=0$ ට තාත්ත්වික මූල එකක් පමණක් තිබෙයි නම්

$x^2+(a+b)x-3ab+(a+b)^2=0$ ට සංකීර්ණ මූල තිබීය යුතුය. (05)

$x^2+(a+b)x-3ab+(a+b)^2=0$ ට සංකීර්ණ මූල තිබීම සඳහා

$(a+b)^2-4\left\{(a+b)^2-3ab\right\}<0$ විය යුතුය. (05)

එනම්, $(a+b)^2-4ab>0$ විය යුතුය. $\Delta=(a+b)^2-4(a^2+b^2-ab)$

$=-3(a-b)^2$ $\Delta<0$

එනම්, $(a-b)^2>0$ විය යුතුය. (05)

එනම්, a හා b ප්‍රතිත්න විය යුතුය. (05) 20

$ab=3$ හා $a^3+b^3=12$ නම් $x^3-9x-12=x^3-3abx-(a^3+b^3)$ වේ.

එනම්, $a^3+\left(\frac{3}{a}\right)^3=12$ නම් $x^3-9x-12=x^3-3abx-(a^3+b^3)$ වේ.

එනම්, $a^6-12a^3+27=0$ නම් $x^3-9x-12=x^3-3abx-(a^3+b^3)$ වේ

එනම්, $(a^3-9)(a^3-3)=0$ නම් $x^3-9x-12=x^3-3abx-(a^3+b^3)$ වේ.

එනම්, $(a^3-9)(a^3-3)=0$ නම් $x^3-9x-12=x^3-3abx-(a^3+b^3)$ වේ.

එනම්, $a=3^{\frac{2}{3}}$ හා $b=3^{\frac{1}{3}}$ නම් $x^3-9x-12=x^3-3abx-(a^3+b^3)$ වේ.

(05) (05) (05)

$a=3^{\frac{2}{3}}$ හා $b=3^{\frac{1}{3}}$ නම් $x^3-9x-12=0$ යන්න $x^3-3abx-(a^3+b^3)=0$ ලෙස ලිවිය හැකිය.

$a=3^{\frac{2}{3}}$ හා $b=3^{\frac{1}{3}}$ ප්‍රතිත්න බැවින් (05) ඉහත ප්‍රතිඵලය අනුව $x^3-9x-12=0$ ට තාත්ත්වික මූල එකක් පමණක් තිබෙයි. (05) 25

මෙම තාත්ත්වික මූලය $3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}$ වේ. (05) 05

12.(a) $r\in\mathbb{Z}^+$ සඳහා $u_r=\dfrac{1}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}$ යැයි ගනිමු.

r ඇසුරෙන් $\frac{u_{r+1}}{u_r}$ සොයන්න.

ඒ නයින්, $r=1,2,3,\ldots$ සඳහා $(2r-1)u_r-(2r+1)u_{r+1}=4u_{r+1}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{n}u_r=\frac{1}{12}-\frac{1}{4(2n+1)(2n+3)}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty}u_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

Alevel Lapis උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.

(b) $y = |2x-8|$ හි ප්‍රස්තාරය අඳින්න.

ඒ ඇසුරින්, $y = -|2x-8|$ හි ප්‍රස්තාරය අඳින්න.

$y = 4-|2x-8|$ හා $y = |2x-10|$ හි ප්‍රස්තාර, එකම රූප සටහනක අඳින්න.

ඒ ඇසුරින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, $|2x-10|+|2x-8| \le 4$ අසමානතාව සපුරාලනු ලබන x හි තාත්ත්වික අගය කුලකය සොයන්න.

(a) $u_r = \dfrac{1}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)} \Rightarrow u_{r+1} = \dfrac{1}{(2r+1)(2r+3)(2r+5)}$ (5)

$\dfrac{u_{r+1}}{u_r} = \dfrac{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}{(2r+1)(2r+3)(2r+5)} = \dfrac{(2r-1)}{(2r+5)}$ (05) 10

එනම්, $(2r-1)u_r = (2r+5)u_{r+1}$

$= (2r+1)u_{r+1} + 4u_{r+1}$ (05)

එනම්, $(2r-1)u_r - (2r+1)u_{r+1} = 4u_{r+1}$ for $r = 1, 2, 3, \ldots$ 05

$4u_1 = 5u_1 - u_1$ (05)

$r = 1$ විට, $4u_2 = u_1 - 3u_2$ (05)

$r = 2$ විට, $4u_3 = 3u_2 - 5u_3$ (05)

.....

.....

.....

$r = n-2$ විට, $4u_{n-1} = (2n-5)u_{n-2} - (2n-3)u_{n-1}$ (05)

$r = n-1$ විට, $4u_n = (2n-3)u_{n-1} - (2n-1)u_n$ (05)

$4\sum_{r=1}^{n} u_r = 5u_1 - (2n-1)u_n = \dfrac{5}{1.3.5} - \dfrac{(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$

(05) (05)

$\sum_{r=1}^{n} u_r = \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{4(2n+1)(2n+3)}$. (05) 40

ඔව්, $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ. (05) 05

හේතුව:

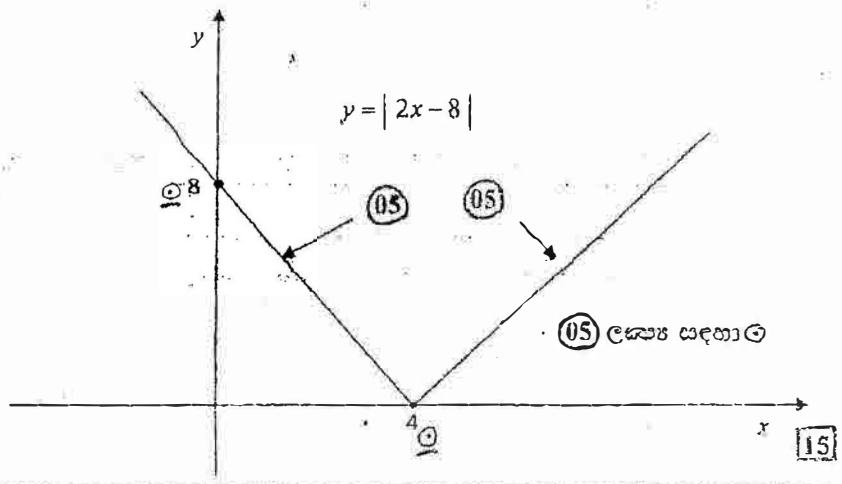
$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} u_r = \lim_{n\to\infty}\left\{\dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{4(2n+1)(2n+3)}\right\} = \dfrac{1}{12} - \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{4n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)} = \dfrac{1}{12}$ (05)

(05)

n අනන්තය කරා එළඹෙන විට, ශ්‍රේණියේ පළමු n පද වල ඓක්‍ය පරිමිත සීමාවක් කරා එළඹෙන බැවින් ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ. 10

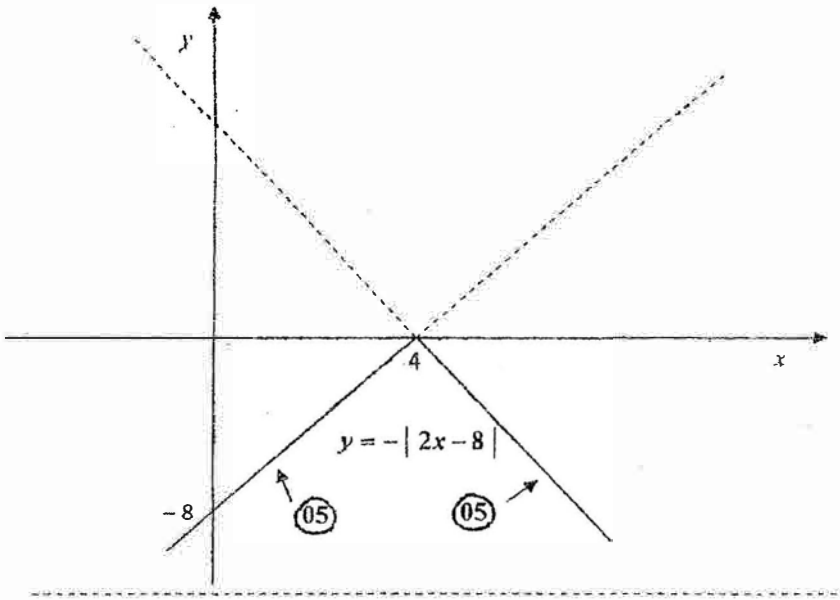
8

(b)

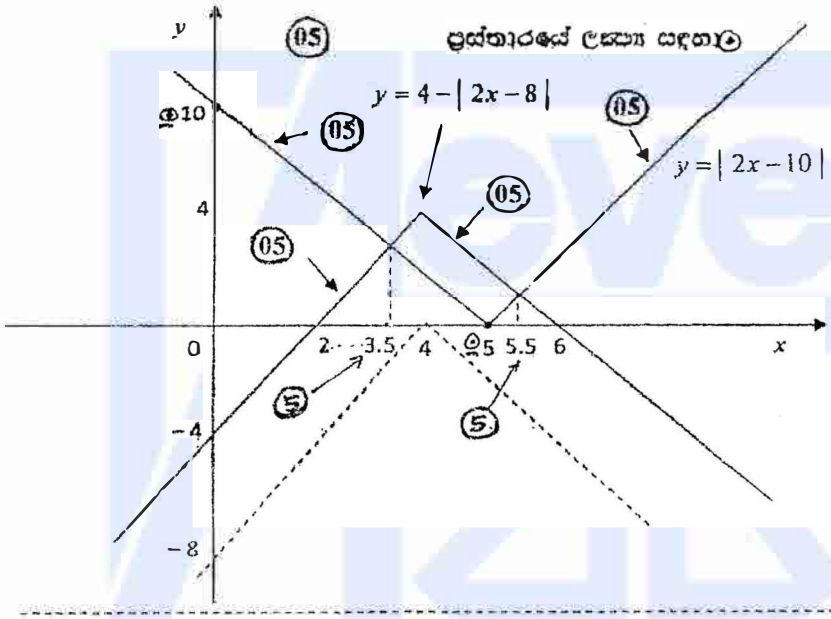


15

Alevel ඇසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.



10



35

$3.5 \le x \le 5.5$ වන විට $y = 4 - |2x - 8|$ හි ප්‍රස්තාරය $y = |2x - 10|$ හි ප්‍රස්තාරයට ඉහළින් පිහිටන බව ඉහත ප්‍රස්තාර වලින් පැහැදිලි වේ. (10)

එබැවින්, $3.5 \le x \le 5.5$ වන විට $|2x - 10| + |2x - 8| \le 4$ වේ. [20]

$\{x \in \mathbb{R} : 3.5 \le x \le 5.5\}$ 20

(13.) (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ හා $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $A(\lambda A + \mu I) = I$ වන අයුරින් λ හා μ අගයන් සොයන්න; මෙහි I යනු 2×2 ඒකක න්‍යාසය වේ.

ඒ නයින්, A^{-1} සොයන්න.

(b) P, Q හා R යනු ආර්ගන් සටහනෙහි පිළිවෙළින් z_0, z_1 හා z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ප්‍රතිඝාත ලක්ෂ්‍ය තුනක් යැයි ගනිමු.

$PQ = PR$ ද, θ යනු PQ සිට PR ට වාමාවර්ත ලෙස මනින ලද කෝණය ද නම්

$z_2 - z_0 = (z_1 - z_0)(\cos\theta + i\sin\theta)$ බව පෙන්වන්න.

වාමාවර්ත ලෙස ගන්නා ලද A, B, C හා D ලක්ෂ්‍ය ආර්ගන් සටහනෙහි සමචතුරස්‍රයක් සාදයි. A හා B ලක්ෂ්‍ය මඟින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා පිළිවෙළින් $1 - i$ හා z යැයි ගනිමු. C හා D ලක්ෂ්‍ය මඟින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා z ඇසුරෙන් සොයන්න.

$AC = 2$ වන අයුරින් C විචලනය වෙයි නම්, B හි පථය ආර්ගන් සටහනෙහි සොයන්න.

Alevel ලාපි උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.

(a) $\mathbf{A}(\lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{I})=\mathbf{I}\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\end{pmatrix}\left\{\lambda\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$ (05)

එනම්, $\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\lambda+\mu&\lambda\\-\lambda&3\lambda+\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ (10)

එනම්, $\begin{pmatrix}3\lambda+2\mu&5\lambda+\mu\\-5\lambda-\mu&8\lambda+3\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$ (10)

$3\lambda+2\mu=1$, $5\lambda+\mu=0$ හා $8\lambda+3\mu=1\Rightarrow$ $\lambda=-\frac{1}{7}$ හා $\mu=\frac{5}{7}$ වේ.

(05) (05) (05) (05) $\boxed{45}$

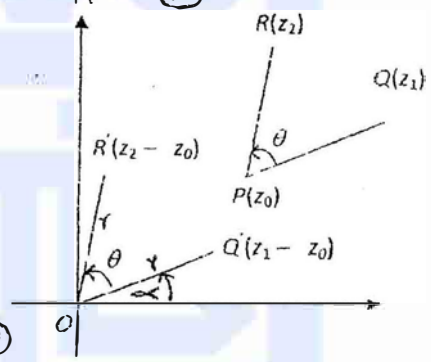
$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}(\lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{I})=\lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{I}$ (05)

$$=\begin{pmatrix}2\lambda+\mu&\lambda\\-\lambda&3\lambda+\mu\end{pmatrix}$$ (05)

$$=\begin{pmatrix}-\frac{2}{7}+\frac{5}{7}&-\frac{1}{7}\\\frac{1}{7}&-\frac{3}{7}+\frac{5}{7}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{7}&-\frac{1}{7}\\\frac{1}{7}&\frac{2}{7}\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3&-1\\1&2\end{pmatrix}.$$

(05) (5) $\boxed{20}$

(b) O ඔස්සේ PQ ට සමාන හා සමාන්තරව OQ' රේඛා ඛණ්ඩය අඳින්න. (05)



එවිට ආර්ගන් සටහනෙහි Q' ලක්ෂ්‍යයෙන් z_1-z_0 සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය වේ. (05)

මෙලෙසම, O ඔස්සේ PR ට සමාන හා සමාන්තරව OR' රේඛා ඛණ්ඩය අඳින්න.

එවිට ආර්ගන් සටහනෙහි R' ලක්ෂ්‍යයෙන් z_2-z_0 සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය වේ. (05)

O වටා θ කෝණයකින් වමාවර්ත අතට OQ' භ්‍රමණය කිරීමෙන් R' ලක්ෂ්‍යය ලබාගත හැකිය. (05)

එබැවින්, R' ලක්ෂ්‍යයෙන් $(z_1-z_0)(\cos\theta+i\sin\theta)$ (10) සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය වේ.

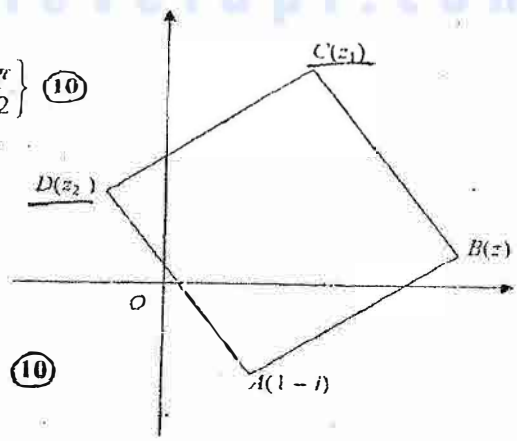
ඒ නයින්, $z_2-z_0=(z_1-z_0)(\cos\theta+i\sin\theta)$ ලැබේ (5) $\boxed{35}$

A, B හා D ලක්ෂ්‍ය තුන සලකමු.

ඉහත ප්‍රතිඵලය යෙදීමෙන්

$z_2-(1-i)=\{z-(1-i)\}\left\{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right\}$ (10)

ලැබේ.



එනම්, $z_2=i\{z-(1-i)\}+1-i$

එනම්, $z_2=iz-2i=i(z-2)$ (05)

D

C, D හා B ලක්ෂ්‍ය තුන සලකමු.

ඉහත ප්‍රතිඵලය නැවත යෙදීමෙන්

$z-z_1=\{i(z-2)-z_1\}\left\{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right\}$ (10)

ලැබේ.

එනම්, $z-z_1=i\{i(z-2)-z_1\}=-(z-2)-iz_1$

එනම්, $z_1=\frac{2(z-1)}{1-i}=\frac{2(z-1)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=(1+i)(z-1)$. (05)

C

$AC=|z_1-(1-i)|=|(1+i)(z-1)-(1-i)|=|(1+i)z-2|=|(x-y-2)+i(x+y)|$

(05) (05)

Alevel Api උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.

$AC = 2$ බැවින් $(x-y-2)^2 + (x+y)^2 = 4$ වේ. (05)

එනම්, $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 + x^2 + y^2 = 4$

එනම්, $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$

එනම්, $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$ (05) **50**

(14.) (a) $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx$ යැයි ගනිමු; මෙහි a හා b යනු නාත්ත්වික නියත වේ. $f'(3) = 12$ හා $f''(3) = 18$ යැයි සිතමු; මෙහි f' හා f'' ට සුපුරුදු තේරුම් තිබෙයි.

a හා b හි අගයන් සොයන්න.

a හා b හි මෙම අගයන් සඳහා $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක්, හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් අඳින්න.

ඒ නයින්, $2x^2 + ax + b = \frac{3}{x}$ සමීකරණයේ විසඳුම් ගණන සොයන්න.

(b) පරිමාව $8192\ \text{cm}^3$ වූ සමචතුරස්‍රාකාර පතුලක් සහිත සංවෘත යෂ්ඨිකෝණාස්‍රාකාර පෙට්ටියක් තුනී කාඩ්බෝඩ්වලින් සාදා ඇත. පෙට්ටියේ පතුලේහි පැත්තක දිග $4x$ cm යැයි ගනිමු. අරය x cm වන වෘත්තාකාර සිදුරක් ඉහළ සමචතුරස්‍රාකාර මුහුණතෙන් කපා ඉවත් කර ඇත. සිදුර සහිත පෙට්ටියේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය වන $A\ \text{cm}^2$ යන්න, $A = (32-\pi)x^2 + \frac{8192}{x}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $x = \frac{16}{\sqrt[3]{32-\pi}}$ වන විට A අවම වන බව පෙන්වන්න.

(a) $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx$

$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$ (05) හා $f''(x) = 12x + 2a$ වේ. (05)

$f'(3) = 12$ හා $f''(3) = 18$ බැවින්,

$54 + 6a + b = 12$ (05) හා $36 + 2a = 18$ (05) ලැබේ.

$6a + b = -42$

$2a = -18$

එබැවින්, $a = -9$ (05) හා $b = 12$ වේ (05) **30**

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ වන අතර

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 1$ හා $x = 2$ වේ.

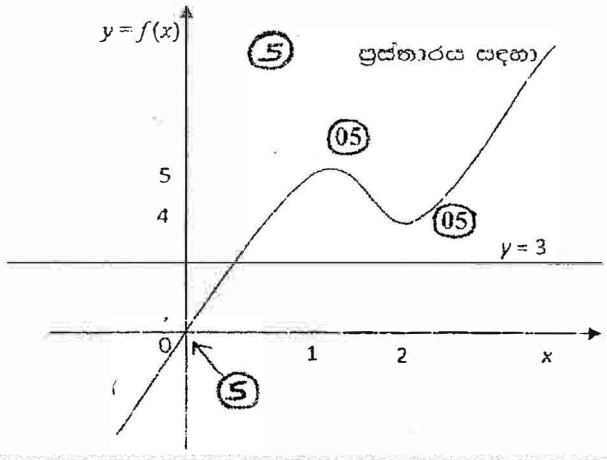
(05) (05)

$x = 1$

$x = 2$

	$x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x$
$f'(x)$ හි ලකුණ	(+)	(−)	(+)
	$f(x)$ වැඩි වේ.	$f(x)$ අඩු වේ.	$f(x)$ වැඩි වේ.
	(5)	(5)	(5)

$f(0) = 0$, $f(1) = 5$ හා $f(2) = 4$ වේ.



45

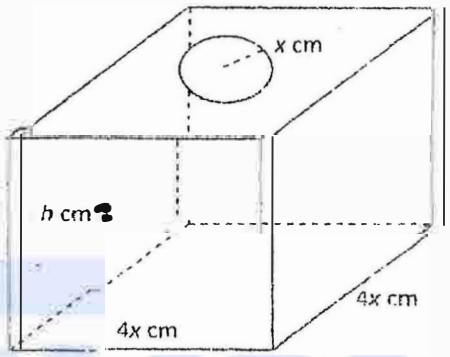
Aeve Lapi උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.

$2x^3 + ax + b = \frac{3}{x} \Leftrightarrow f(x) = 3$. (05)

$2x^2 + ax + b = \frac{3}{x}$ හි විසඳුම් ගණන, $y = f(x)$ වක්‍රයේ හා $y = 3$ රේඛාවේ ඡේදන ලක්ෂ්‍ය ගණන වේ. (05) → (ප්‍රශ්නයේ $y = 3$ කියා නොදී රේඛාව.)

ඉහත ප්‍රස්තාරයට අනුව ඡේදන ලක්ෂ්‍ය එකක් පමණක් ඇති බැවින් අවශ්‍ය පිළිතුර 1 වේ. (05) 15

(b) පෙට්ටියේ උස h cm යැයි ගනිමු.



$A = (2 \times 16x^2 + 4 \times 4xh) - \pi x^2$ (10)

පෙට්ටියේ පරිමාව වන $16x^2h$ යන්න 8192 ට සමාන වේ. (5)

$16x^2h = 8192 \Rightarrow 16h = \frac{8192}{x^2}$ (5) (05)

$A = (32 - \pi)x^2 + \frac{8192}{x}$. (05)

30

$\frac{dA}{dx} = 2(32 - \pi)x - \frac{8192}{x^2}$. (05)

$\therefore \frac{dA}{dx} = 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{4096}{(32-\pi)} = \frac{(16)^3}{(32-\pi)} \Leftrightarrow x = \frac{16}{\sqrt[3]{(32-\pi)}}$.

(05) (05) (05)

$x < \frac{16}{\sqrt[3]{(32-\pi)}}$ විට $\frac{dA}{dx} < 0$ වන අතර $x > \frac{16}{\sqrt[3]{(32-\pi)}}$ විට $\frac{dA}{dx} > 0$ වේ. (05)

එබැවින්, $x = \frac{16}{\sqrt[3]{(32-\pi)}}$ විට A අවම වේ. (05) 30

---

15. (a) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය යොදගනිමින්, $\int_1^{\frac{3}{2}} x^2 \ln x \, dx$ අගයන්න.

(b) $t = \tan x$ යැයි ගනිමු.

$\cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$ හා $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4\cos 2x + 3\sin 2x + 5} \, dx = \frac{1}{12}$ බව පෙන්වන්න.

(c) a හා b යනු ප්‍රභින්න තාත්ත්වික සංඛ්‍යා යැයි ගනිමු.

$x \in \mathbb{R} - \{a, b\}$ සඳහා $\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$ වන අයුරින් A හා B නියත සොයන්න.

ඉහත සමීකරණයේ x, a හා b සුදුසු ලෙස ප්‍රතිස්ථාපනය කරමින්, $\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ යන්න හින්න ගාස අයුරෙන් ලියා දක්වා, ඒ නයින්, $\int \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \, dx$ සොයන්න.

Alevel ලාභ උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.

(a) $\int_1^e x^{\frac{3}{2}} \ln x\,dx = \int_1^e \ln x\, d\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)$ (10)

$= \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\ln x\right]_1^e - \frac{2}{5}\int_1^e x^{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{x}\right)dx$ (5) (5)

$= \frac{2}{5}e^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5}\int_1^e x^{\frac{3}{2}}dx$ $\because \ln e = 1$ හා $\ln 1 = 0$ (5)

$= \frac{2}{5}e^{\frac{5}{2}} - \left(\frac{2}{5}\right)^2\left[x^{\frac{5}{2}}\right]_1^e$ (05)

$= \frac{2}{5}e^{\frac{5}{2}} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 e^{\frac{5}{2}} + \left(\frac{2}{5}\right)^2$ (05) $= \frac{6}{25}e^{5/2} + \frac{4}{25}$ [35]

(b) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. (05)

$\sin 2x = 2\cos x \sin x = \frac{2\cos x \sin x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{2t}{1+t^2}$. (05)

$t = \tan x \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + t^2$

එබැවින්, $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$ වේ. (05) [15]

---

(5) දිනා වෙළුම (5) අගයෙහි ප්‍රතිඵල

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4\cos 2x + 3\sin 2x + 5}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{4(1-t^2)+6t+5}\,dt$

$= \int_0^1 \frac{1}{t^2+6t+9}\,dt$ (5)

$= \int_0^1 \frac{1}{(t+3)^2}\,dt = \left[-\frac{1}{(t+3)}\right]_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

(05) (05) (05) [30]

(c) $A = \frac{1}{a-b}$ හා $B = \frac{1}{b-a}$ යැයි ගනිමු.

එවිට $x \in \mathbb{R} - \{a, b\}$ සඳහා

$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{1}{a-b}\left\{\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right\} = \frac{1}{(x-a)(x-b)}$ වේ. (05) [10]

එබැවින්, $\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{(a-b)}\frac{1}{(x-a)} - \frac{1}{(a-b)}\frac{1}{(x-b)} \rightarrow (1)$ වේ. (05)

---

(1) හි x, a හා b පිළිවෙළින් x^2, $-a^2$ හා $-b^2$ ලෙසින් ප්‍රතිස්ථාපනය කිරීමෙන් (5) (5) (5)

$\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{1}{(-a^2+b^2)}\frac{1}{(x^2+a^2)} - \frac{1}{(-a^2+b^2)}\frac{1}{(x^2+b^2)}$ ලැබේ. (10)

$\therefore \int \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx = \frac{1}{(b^2-a^2)}\int \frac{1}{(x^2+a^2)}\,dx - \frac{1}{(b^2-a^2)}\int \frac{1}{(x^2+b^2)}\,dx$ (05)

$= \frac{1}{(b^2-a^2)}\left\{\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{b}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)\right\} + C$, $a, b \neq 0$ නම් (10) (10) (5)

මෙහි C යනු අගිමන නියතයකි.

www.alevelapi.com

Alevel ඇප් උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.

$a = 0$ නම් $b \neq 0$ වේ.

$$\therefore \int \frac{1}{x^2(x^2+b^2)}dx = \frac{1}{b^2}\int \frac{1}{x^2}dx - \frac{1}{b^2}\int \frac{1}{(x^2+b^2)}dx$$

$$= -\frac{1}{b^2 x} - \frac{1}{b^3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right) + C'' \text{ මෙහි } C \text{ යනු අභිමත නියතයකි.}$$

(5)

If $b = 0$ then $a \neq 0$.

$$\therefore \int \frac{1}{x^2(x^2+b^2)}dx = -\frac{1}{a^2}\int \frac{1}{(x^2+a^2)}dx + \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{x^2}dx$$

$$= -\frac{1}{a^2 x} - \frac{1}{a^3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C''' \text{ මෙහි } C'' \text{ යනු අභිමත නියතයකි.}$$

60

---

16 (a) $lx+my+1=0$ සරල රේඛාව සමඟ සමද්විපාද සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයක් සාදන ලෙස මූල ලක්ෂය ඔස්සේ එකිනෙකට ලම්බව යන සරල රේඛා දෙකෙහි සමීකරණ $(l-m)x+(l+m)y = 0$ හා $(l+m)x-(l-m)y = 0$ බව පෙන්වන්න.

(b) $S' \equiv x^2+y^2+2g'x+2f'y+c' = 0$ වෘත්තය, $S \equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c = 0$ වෘත්තය, $S = 0$ වෘත්තයෙහි විෂ්කම්භයක කෙළවරවලදී ඡේදනය කරයි නම්, $2g^2+2f^2-c = 2gg'+2ff'-c'$ බව පෙන්වන්න.

විවිධ වෘත්තයක්, $S_1 \equiv x^2+y^2-25 = 0$ හා $S_2 \equiv x^2+y^2-2x-4y-11 = 0$ වෘත්ත, එහා එහාට විෂ්කම්භයක කෙළවරවලදී ඒවා ඡේදනය කරයි. විවිධ වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය $x+2y+2 = 0$ සරල රේඛාව මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

(a) මූල ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන රේඛාවක සමීකරණය $y = kx$ ලෙස ලිවිය හැකිය. (05)

මෙම රේඛාව $lx+my+1 = 0$ රේඛාව ඡේදනය කරයි නම් ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ x බණ්ඩාංකය $lx+m(kx)+1 = 0$ යනුවෙන් අතර එයින් $x = -\frac{1}{l+mk}$ ලැබේ. (5)

$y = kx$ රේඛාවේ හා $lx+my+1 = 0$ රේඛාවේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ බණ්ඩාංක $\left(-\frac{1}{l+mk}, -\frac{k}{l+mk}\right)$ වේ. (05) + (5)

මූල ලක්ෂ්‍යයේ සිට මෙම ඡේදන ලක්ෂ්‍යයට ඇති දුර

$$= \sqrt{\left(-\frac{1}{l+mk}\right)^2 + \left(-\frac{k}{l+mk}\right)^2} = \frac{\sqrt{1+k^2}}{|l+mk|} \text{ වේ.}$$

(05) (05)

$\frac{\sqrt{1+k^2}}{|l+mk|}$ හි k, $-\frac{1}{k}$ මගින් ප්‍රතිස්ථාපනය කිරීමෙන් (05) මූල ලක්ෂ්‍යයේ සිට $y = kx$ රේඛාවට ඇඳි ලම්බකයේ හා $lx+my+1 = 0$ රේඛාවේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යයට ඇති දුර

$$\frac{\sqrt{1+\left(-\frac{1}{k}\right)^2}}{\left|l+m\left(-\frac{1}{k}\right)\right|} \text{ ලෙස ලැබේ. (05)}$$

එනම්, $\frac{\sqrt{1+k^2}}{|kl-m|}$ වේ. (05)

සාධන ලද ත්‍රිකෝණය සමද්විපාද බැවින් $\frac{\sqrt{1+k^2}}{|l+mk|} = \frac{\sqrt{1+k^2}}{|kl-m|}$ වේ. (10)

එබැවින්, $k = \frac{l+m}{l-m}$ ලැබේ. (05)

$$\therefore -\frac{1}{k} = \frac{l-m}{l+m} \quad (05)$$

සරල රේඛා දෙකෙහි සමීකරණ $(l-m)x+(l+m)y = 0$ හා $(l+m)x-(l-m)y = 0$ වේ.

(05) (05) 75

Alevel Lapi උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දේ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.

(b) $S=0$ හා $S'=0$ වෘත්ත දෙකට ඇඳි පොදු ජ්‍යාවේ සමීකරණය

$2(g-g')x+2(f-f')y+c-c'=0$ වේ. (10)

$S'=0$ වෘත්තය, $S=0$ වෘත්තය $S=0$ වෘත්තයේ විප්කම්භයකින් අන්ත වලදී කපන බැවින් $S=0$ වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය වන $(-g,-f)$

$2(g-g')x+2(f-f')y+c-c'=0$ රේඛාව මත පිහිටිය යුතුය (05)

එබැවින්, $2(g-g')(-g)+2(f-f')(-f)+c-c'=0$ ලැබේ. (05)

එහෙම්, $2g^2+2f^2-c=2gg'+2ff'-c'$ වේ. (05) [25]

විචල්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය $S\equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ යැයි ගනිමු. (05)

$S=0$ වෘත්තය, $S_1=0$ වෘත්තය $S_1=0$ වෘත්තයේ විප්කම්භයකින් අන්ත වලදී කපන බැවින් $-(-25)=-c\Rightarrow c=-25$ විය යුතුය.

(10) (05)

$S=0$ වෘත්තය, $S_2=0$ වෘත්තය $S_2=0$ වෘත්තයේ විප්කම්භයකින් අන්ත වලදී කපන බැවින් $2(-1)^2+2(-2)^2-(-11)=-2g+2(-2)f-c$ විය යුතුය. (10)

එහෙම්, $2g+4f=-c-21$ වේ. (05)

c යෙදෙන ආකෘතියෙන් $g+2f=2$ ලැබේ. (05)

$-g+2(-f)=-2$ (05)

එබැවින්, විචල්‍ය වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය වන $(-g,-f)$ $x+2y+2=0$ රේඛාව මත පිහිටියි.

(05) [50]

---

(17) (a) $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ සර්වසමීකරණය යොදාගැනීමෙන් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ,

$\cos^6\theta+\sin^6\theta=a+b\cos4\theta$ වන අයුරින් a හා b යන තාත්ත්වික නියත නිර්ණය කරන්න.

ඒ නයින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ,

(i) $y=8(\cos^6x+\sin^6x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(ii) $\cos^6x+\sin^6x=\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sin4x$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම් සොයන්න.

(b) $\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=\frac{\pi}{4}$ සමීකරණය විසඳන්න.

(a) $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1\Rightarrow\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)^3=1$. (05)

එහෙම්, $\cos^6\theta+3\cos^4\theta\sin^2\theta+3\cos^2\theta\sin^4\theta+\sin^6\theta=1$ (10) වේ.

එහෙම්, $\cos^6\theta+3\cos^2\theta\sin^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\sin^6\theta=1$ වේ.

එහෙම්, $\cos^6\theta+\frac{3}{4}(2\cos\theta\sin\theta)^2+\sin^6\theta=1$ (05) වේ.

එහෙම්, $\cos^6\theta+\sin^6\theta=1-\frac{3}{4}(2\sin^2 2\theta)$ (05) වේ.

එහෙම්, $\cos^6\theta+\sin^6\theta=1-\frac{3}{8}(1-\cos4\theta)$ වේ.

එහෙම්, $\cos^6\theta+\sin^6\theta=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos4\theta$ (05) වේ.

එබැවින්, $\cos^6\theta+\sin^6\theta=a+b\cos4\theta$ වේ; මෙහි $a=\frac{5}{8}$ හා $b=\frac{3}{8}$ වේ.

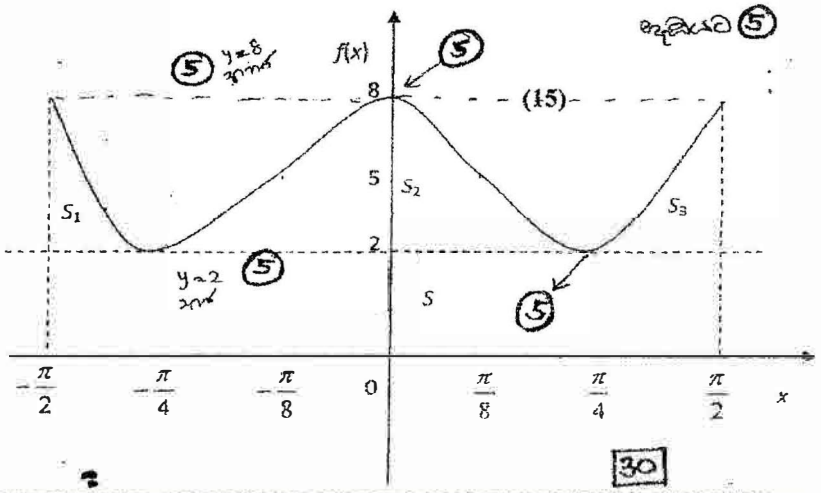
(05) (05) [40]

(i) $f(x)=8(\sin^6x+\cos^6x)=8\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos4x\right)=5+3\cos4x$ (05)

$|x|\le\frac{\pi}{2}$ පරාසය තුළ $f(x)=8(\sin^6x+\cos^6x)$ හි ප්‍රස්තාරය ඇඳීමත්, $|x|\le\frac{\pi}{2}$ පරාසය තුළ $f(x)=5+3\cos4x$ හි ප්‍රස්තාරය ඇඳීමත් එකම වේ.

Alevel Lapi උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාළ සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.

$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$5+3\cos 4x$	8	2	5	8	5	2	8



30

(ii) $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sin 4x$

$\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$ බැවින්

$\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sin 4x$ (05) වේ.

එනම්, $3\cos 4x - 4\sin 4x = 5$ වේ.

එනම්, $\frac{3}{5}\cos 4x - \frac{4}{5}\sin 4x = 1$ (05) වේ.

එනම්, $\cos\alpha\cos 4x - \sin\alpha\sin 4x = 1$ වේ; මෙහි $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ හා $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ වේ.

(05)

එනම්, $\cos(4x+\alpha) = 1$ (05) වේ.

$\Rightarrow 4x + \alpha = 2n\pi, \quad n \in Z$ (05) වේ.

එනම්, $x = \frac{n\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}, \quad n \in Z$ වේ. (5) n දුන්නේ දැනගිය නිසා

30

(b) $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ හා $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$ යැයි ගනිමු. (05)

එවිට, $\tan\alpha = \frac{x-1}{x-2}$, $\tan\beta = \frac{x+1}{x+2}$ හා $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ වේ. (05)

(5)

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan(\alpha+\beta) = 1$ (05)

තමුත් $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$ (05)

$$= \frac{\frac{x-1}{x-2} + \frac{x+1}{x+2}}{1 - \left(\frac{x-1}{x-2}\right)\left(\frac{x+1}{x+2}\right)} \quad (05)$$

$$= \frac{(x-1)(x+2) + (x+1)(x-2)}{(x^2-4) - (x^2-1)} = \frac{2x^2-4}{-3} \quad (5)$$

එබැවින්, $\frac{2x^2-4}{-3} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ ලැබේ. (05)

(05) (05) බන/සහන 2 ම

50

Aevel ඇප් උසස් පෙළ විද්‍යා/ගණිත/කලා/වාණිජ හා තාක්ෂණ විෂය ධාරාවන්ට අදාල සියලුම ප්‍රශ්න පත්‍ර/සටහන් හා තවත් බොහෝ දෑ ලබා ගැනීමට පිවිසෙන්න www.alevelapi.com වෙත.